



# Tracking Adattativo di un Robot Car-Like mediante Feedback Linearization

Lorenzo Magliocchetti  
Arrigo Marchiori  
Michele Marino



# Sommario

- Descrizione del problema
- Modello cinematico
- Feedback linearization
- Adattamento e stimatore
- Simulazioni
- Considerazioni finali

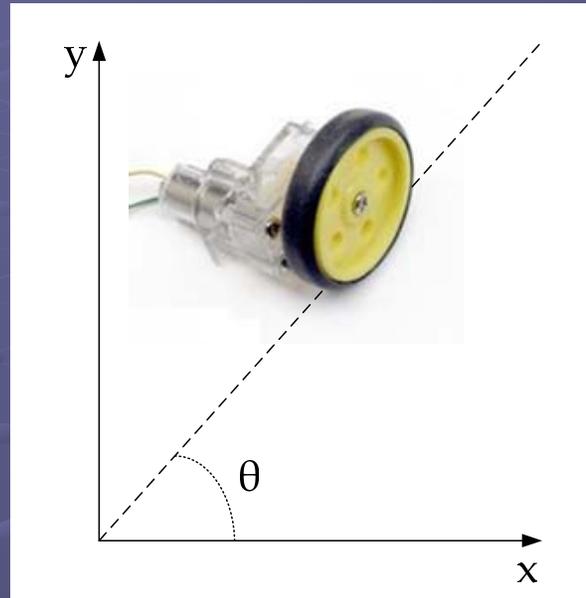


# Descrizione del problema

- Progettazione e simulazione di un sistema di controllo per un robot Car-Like tramite tecnica del feedback
- Esecuzione del task anche in presenza di disturbi
- Ricostruzione dello stato mediante sensori
- Inseguimento di una traiettoria supposta ammissibile
- Riduzione a zero dell'errore



# Modello cinematico dell'uniciclo



Vincolo Pfaffiano:

$$\begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = 0$$

Modello cinematico:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} \rho \omega_r + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega_s$$



# Modello cinematico del Car-Like

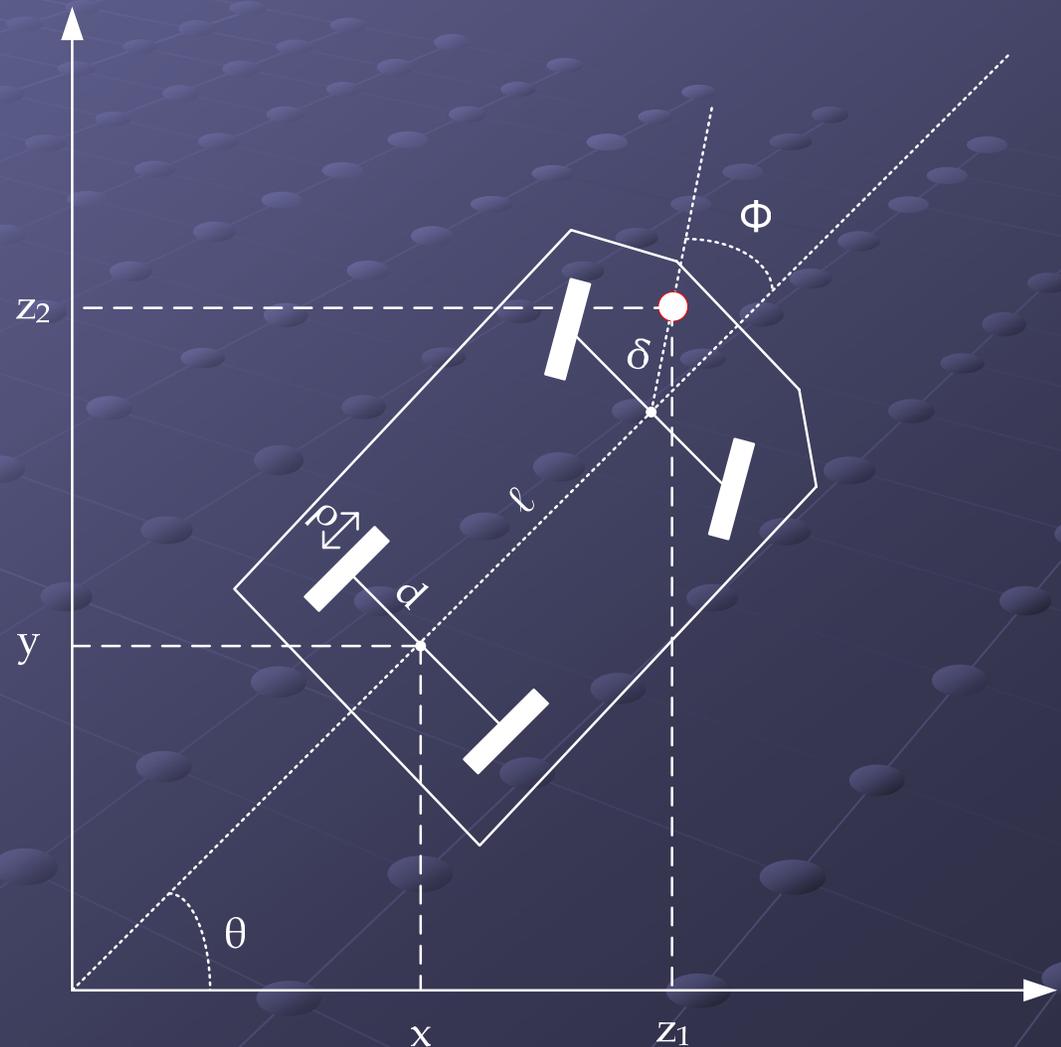
Soggetto ai vincoli anolonomi:

$$\dot{x}_f s_{\theta\phi} - \dot{y}_f c_{\theta\phi} = 0$$

$$\dot{x}s_{\theta} - \dot{y}c_{\theta} = 0$$

Modello cinematico del robot:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{\theta} \\ s_{\theta} \\ t_{\phi} / \ell \\ 0 \end{bmatrix} \rho \omega_r + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega_s$$





# Feedback linearization

Sistema non lineare:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)v$$

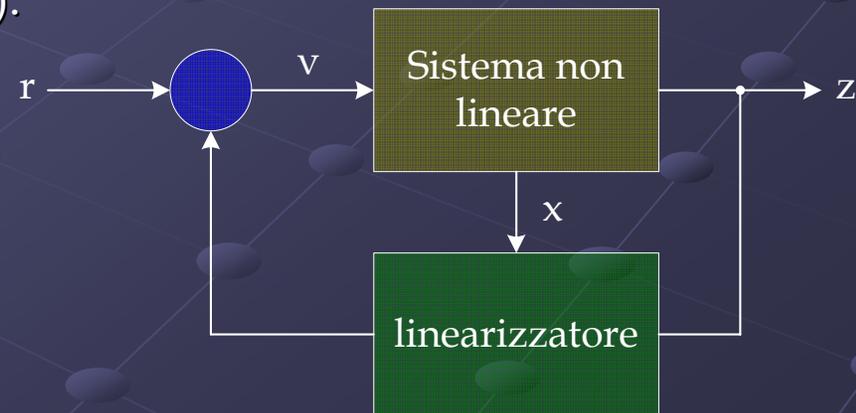
$$z = h(x)$$

Grado relativo 1, derivando z l'ingresso compare nell'uscita:

$$\dot{z} = \left( \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right)^T \dot{x} \quad \dot{z} = L_f h(x) + L_g h(x)v$$

Equazioni del sistema di controllo (d=1):

$$\begin{cases} \dot{z} = r \\ v = \frac{1}{L_g h(x)} \left( -L_f h(x) + r \right) \end{cases}$$





# Static feedback linearization <sup>1/2</sup>

Scelta naturale per  $z=(x,y)'$  che porta alla seguente linearizzazione:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \rho c_\theta & 0 \\ \rho s_\theta & 0 \end{bmatrix} v = A(\theta)v \quad \leftarrow \text{Matrice } A \text{ singolare!}$$

Si sceglie un punto P a distanza  $\Delta$  dal centro dell'asse anteriore

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \left( c_\theta - t_\phi \left( s_\theta + \frac{\delta s_{\theta\phi}}{\ell} \right) \right) \rho & -\delta s_{\theta\phi} \\ \left( s_\theta + t_\phi \left( c_\theta + \frac{\delta c_{\theta\phi}}{\ell} \right) \right) \rho & \delta c_{\theta\phi} \end{bmatrix} v = A(\theta, \phi)v$$

dalla quale si ottengono gli ingressi di controllo

$$v = A^{-1}(\theta, \phi)r \quad \dot{z} = r$$



# Static feedback linearization <sup>2/2</sup>

Controllo di tipo PD con derivata di feedforward:

$$\begin{cases} r_1 = \dot{z}_{d1} + k_{p1}(z_{d1} - z_1) \\ r_2 = \dot{z}_{d2} + k_{p2}(z_{d2} - z_2) \end{cases}$$

Esiste una dinamica interna legata alle variabili  $\theta$  e  $\Phi$ !

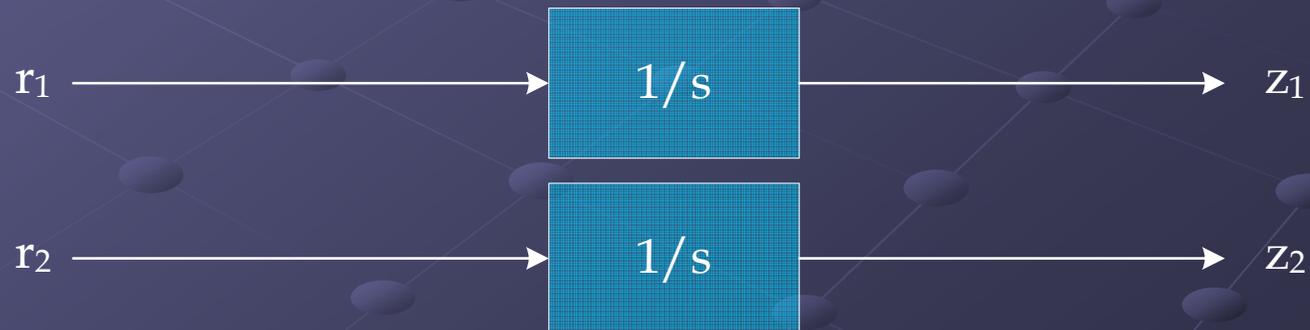
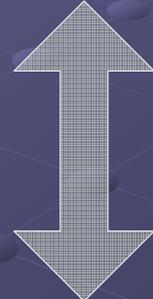
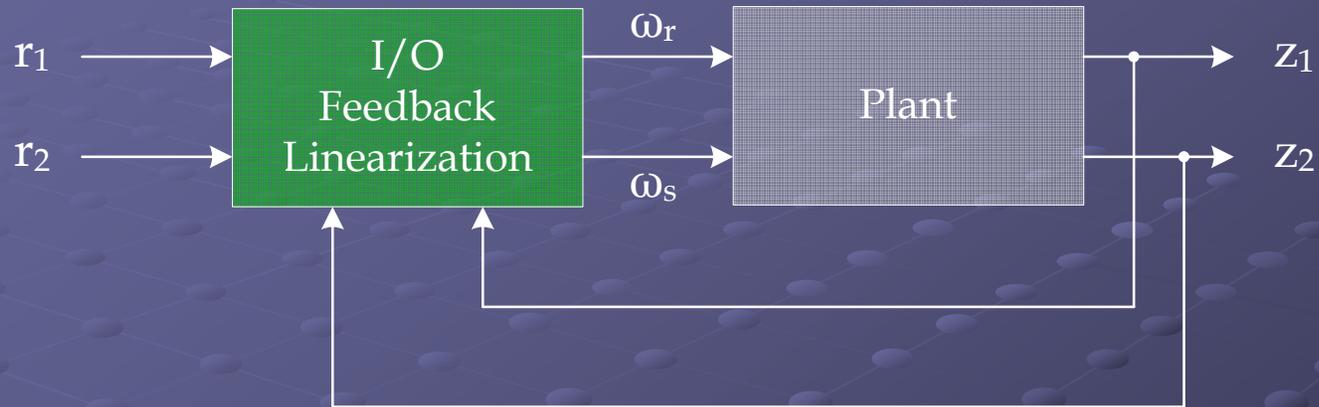
Equazioni del controllore risultante:

$$\omega_r = \frac{1}{\rho} \left( c_\phi c_{\theta\phi} \left( \dot{z}_{d1} + k_{p1}(z_{d1} - z_1) \right) + c_\phi s_{\theta\phi} \left( \dot{z}_{d2} + k_{p2}(z_{d2} - z_2) \right) \right)$$

$$\omega_s = - \left( \frac{c_{\theta\phi} s_\phi}{\ell} + \frac{s_{\theta\phi}}{\delta} \right) \left( \dot{z}_{d1} + k_{p1}(z_{d1} - z_1) \right) - \left( \frac{s_{\theta\phi} s_\phi}{\ell} - \frac{c_{\theta\phi}}{\delta} \right) \left( \dot{z}_{d2} + k_{p2}(z_{d2} - z_2) \right)$$



# Static feedback linearization





# Indirect adaptive control

I parametri  $\rho$  ed  $l$  ricevuti dal controllore sono valori stimati a priori

$$v = A^{-1}(\theta, \phi, \rho_c, l_c)r$$

Per ottenere le performance migliori del controllore è necessario:

- eseguire una stima ricorsiva a partire da un valore iniziale
- fornire ad ogni passo, le stime aggiornate al controllore

Stima dei parametri attraverso un'approssimazione delle equazioni dinamiche al fine renderle lineari nei parametri  $\rho$  ed  $l$ :

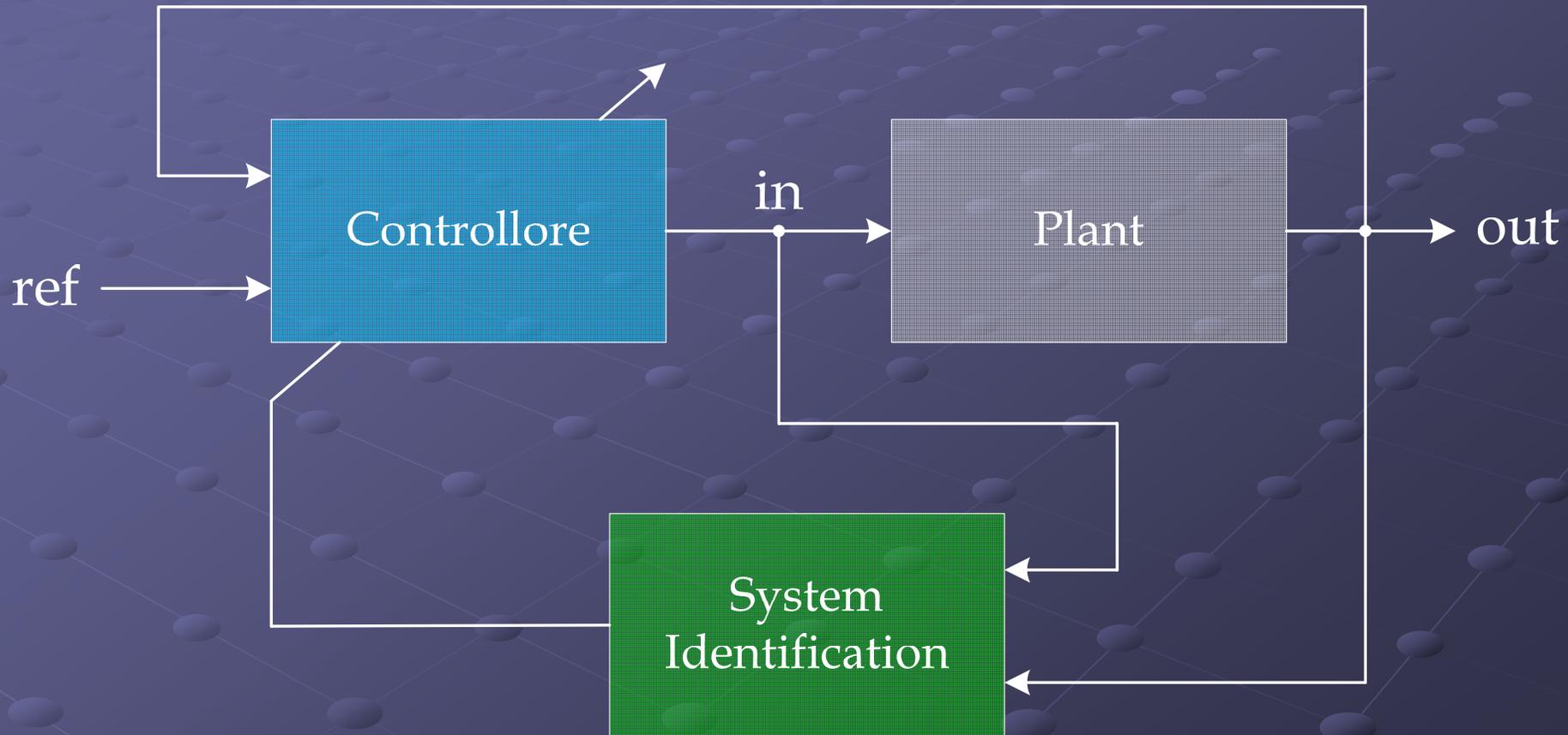
$$\frac{\rho}{l} \approx \frac{1}{l_0} \left( \rho_0 - \frac{\rho_0 l}{l_0} + \rho \right) \quad \beta = \begin{bmatrix} \rho \\ l \end{bmatrix}$$

Stima dei parametri attraverso trasformazione dei parametri:

$$v = \frac{\rho}{l} \quad \beta = \begin{bmatrix} \rho \\ v \end{bmatrix}$$



# Indirect adaptive control





# Stimatore (RLS)

Caratterizzato da una dipendenza lineare dal vettore dei parametri da stimare

$$\tilde{y} = F(x, \beta) = \Phi(x)\beta$$

Stima del vettore dei parametri in modo da ridurre a zero l'errore

$$e_i = y_i - \tilde{y}_i = y_i - \Phi(x_i)\beta$$

Minimi quadrati ricorsivi

➤ Calcolo della matrice  $\Phi(k)$  con i valori stimati di  $\rho$  ed  $l$

➤ Calcolo dell'uscita  $y(k)$  dipendente dagli ingressi

➤ Calcolo della matrice  $\Gamma(k)$   $\Gamma(k) = \left( \Phi_{k+1} P(k) \Phi_{k+1}^T + \lambda A_{k+1}^{-1} \right)^{-1}$

➤ Calcolo della matrice  $P(k+1)$   $P(k+1) = \frac{1}{\lambda} \left( P(k) - P(k) \Phi_{k+1}^T \Gamma(k) \Phi_{k+1} P(k) \right)$

➤ Calcolo/stima del vettore dei parametri  $\theta(k+1)$

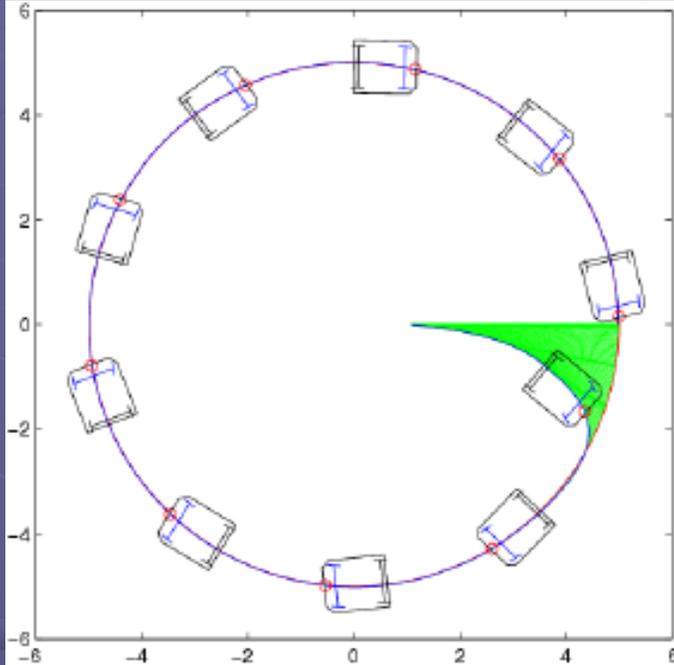
$$\beta(k+1) = \beta(k) + P(k+1) \Phi_{k+1}^T A_{k+1} \left( y_{k+1} - \Phi_{k+1} \beta(k) \right)$$



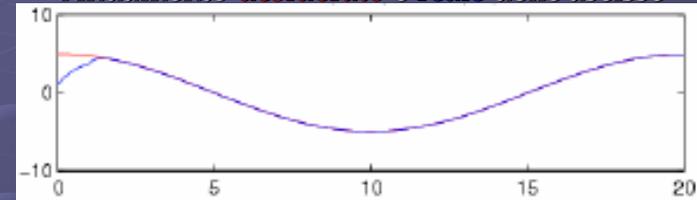
# Simulazioni

## Traiettoria circolare

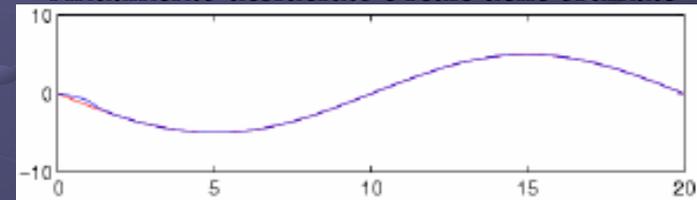
Andamento **desiderato** e **reale** della traiettoria



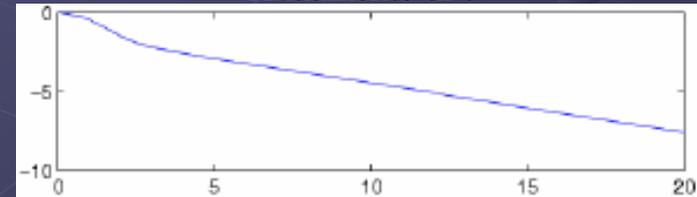
Andamento **desiderato** e **reale** delle ascisse



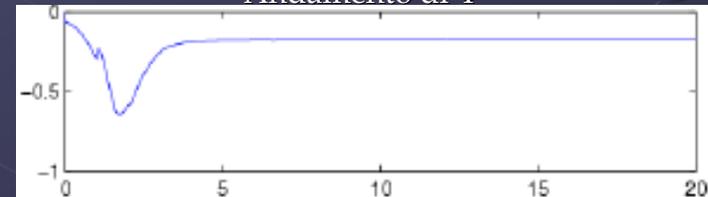
Andamento **desiderato** e **reale** delle ordinate



Andamento di  $\theta$



Andamento di  $\Phi$



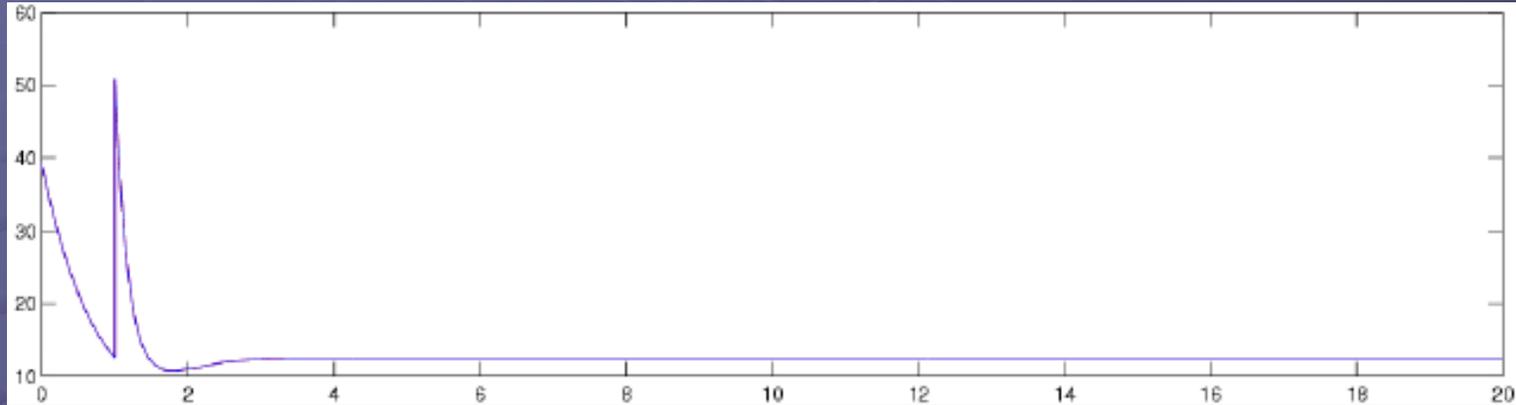
Il robot aggancia velocemente la traiettoria  
errore nullo a regime



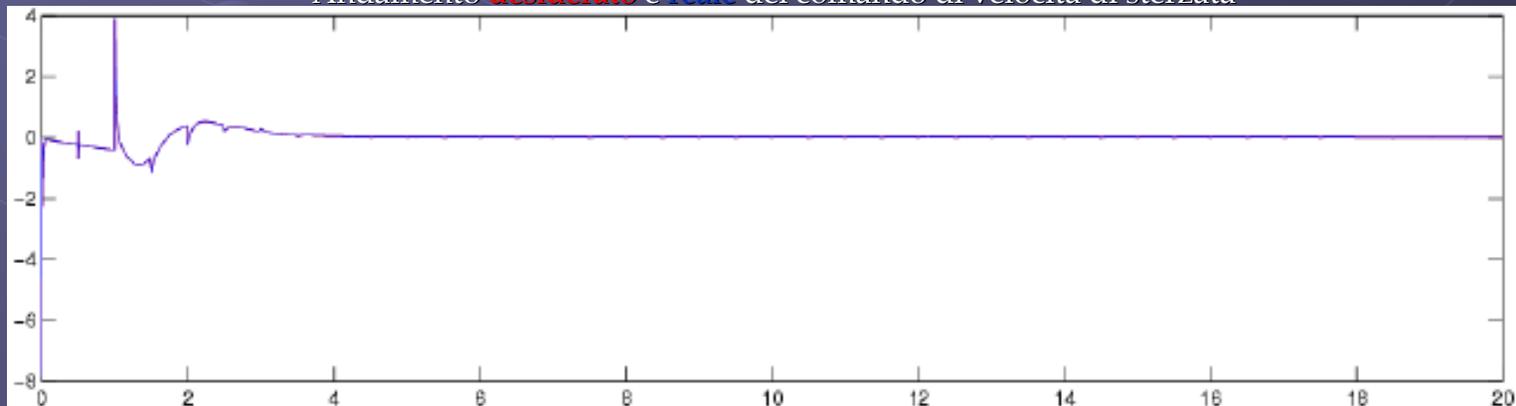
# Simulazioni

## Traiettoria circolare

Andamento **desiderato** e **reale** del comando di velocità di trazione



Andamento **desiderato** e **reale** del comando di velocità di sterzata



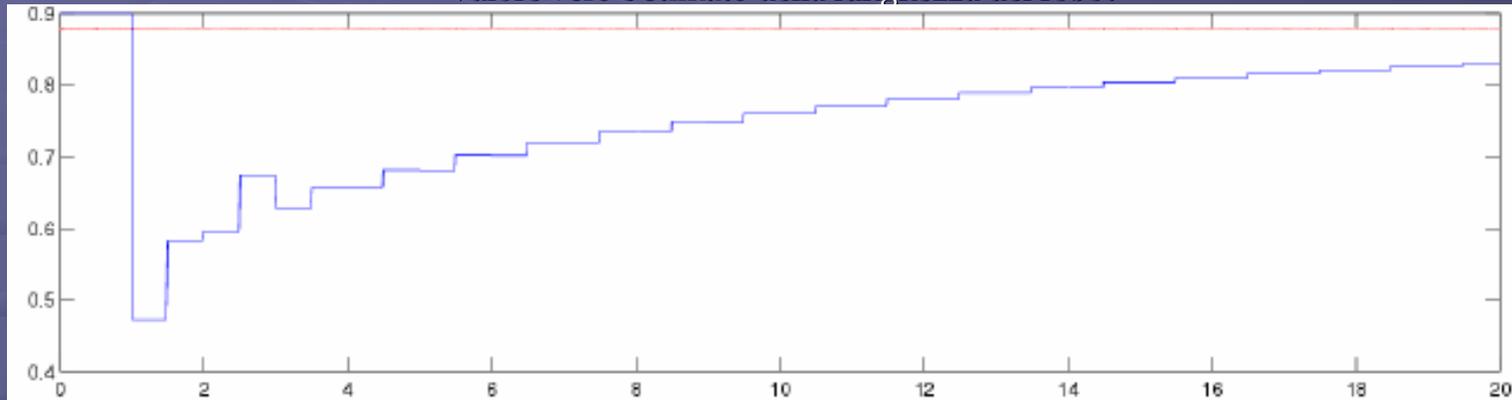
Discontinuità in  $t = 1$  sec dove il controllore riceve stime molto diverse da quelle precedenti



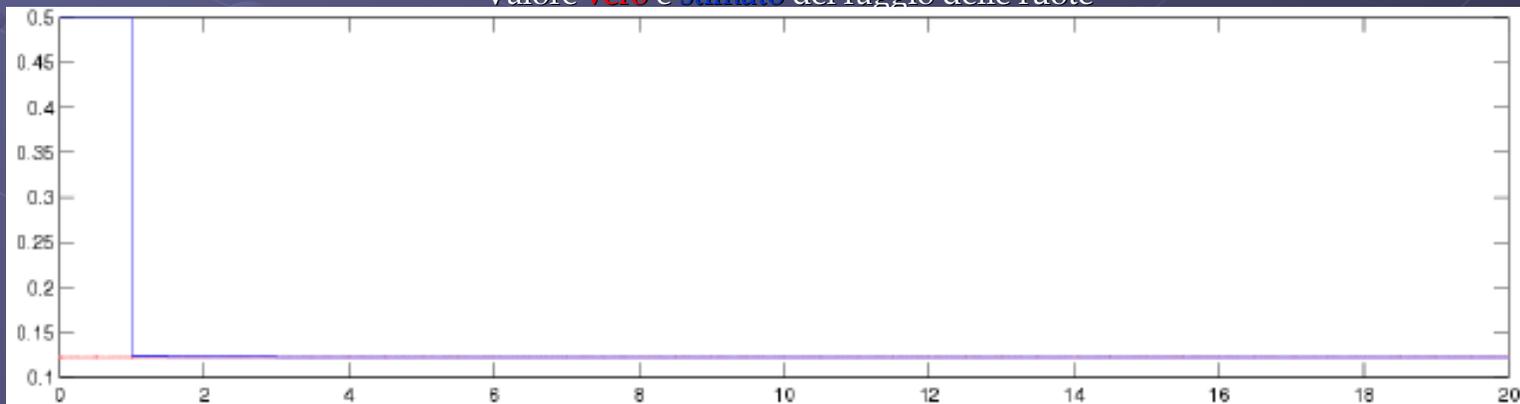
# Simulazioni

## Traiettoria circolare

Valore **vero** e **stimato** della lunghezza del robot



Valore **vero** e **stimato** del raggio delle ruote



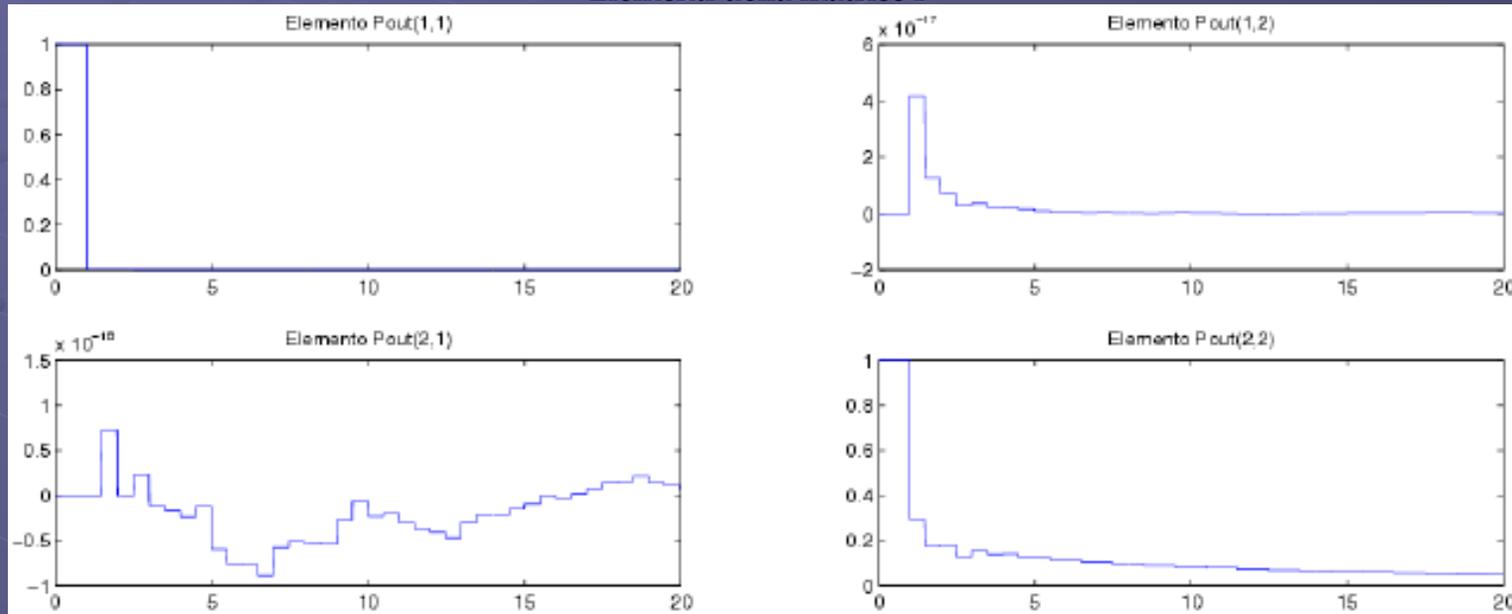
Stima di  $\ell$  più difficile – non converge al valore vero, ma l'errore si annulla



# Simulazioni

## Traiettoria circolare

Elementi della matrice P



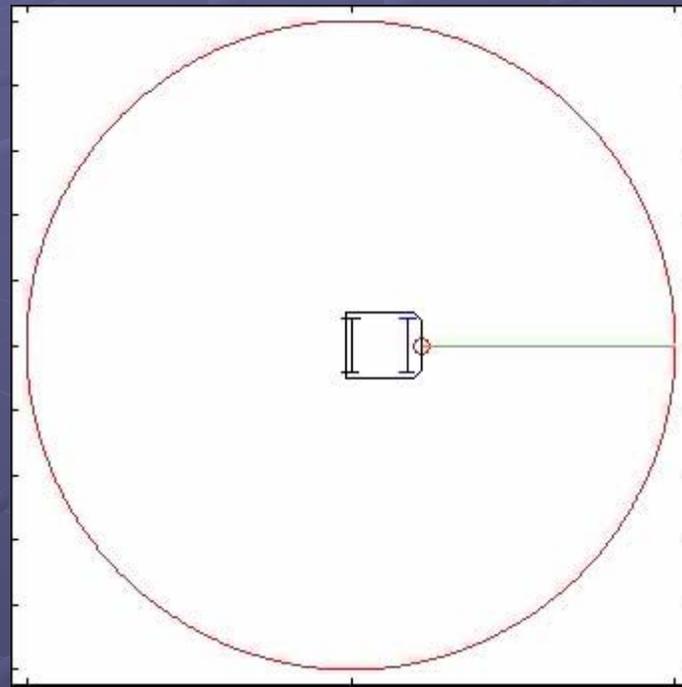
L'elemento  $p_{11}$  (stima di  $\rho$ ) decresce velocemente  
Questo non accade per l'elemento  $p_{22}$  (stima di  $\ell$ )!



# Simulazioni

## Traiettoria circolare

Simulazione 2D

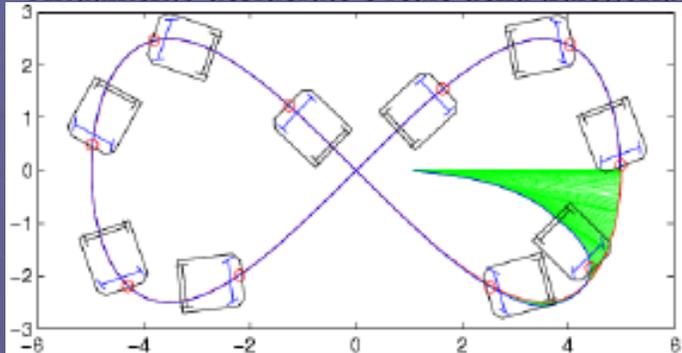




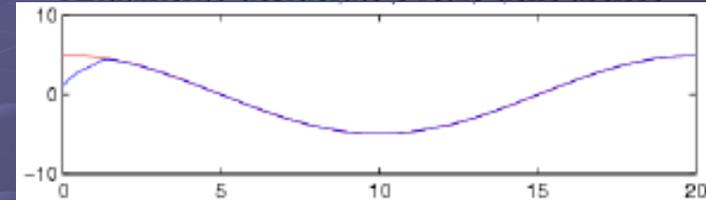
# Simulazioni

## Traiettoria ad otto

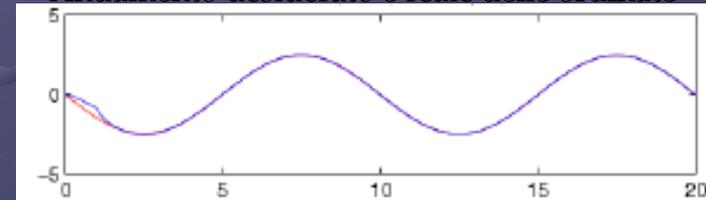
Andamento **desiderato** e **reale** della traiettoria



Andamento **desiderato** e **reale** delle ascisse



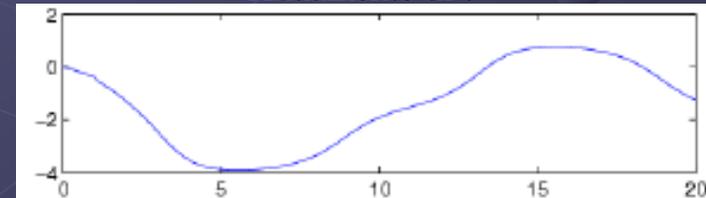
Andamento **desiderato** e **reale** delle ordinate



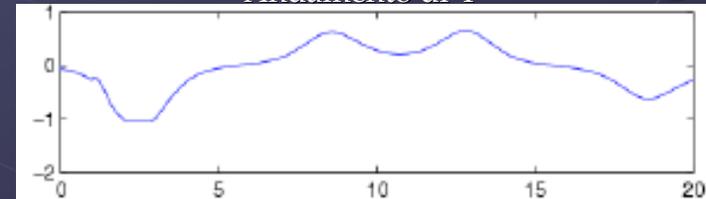
Il robot aggancia la traiettoria

Saturazione dello sterzo

Andamento di  $\theta$



Andamento di  $\Phi$



Inizialmente è presente un errore non nullo

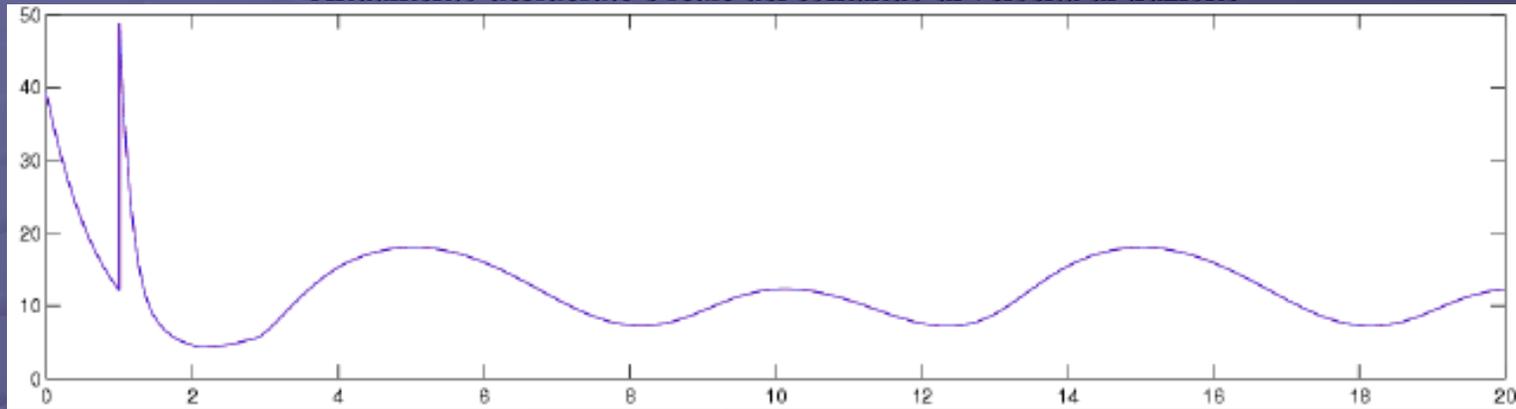
errore nullo a regime



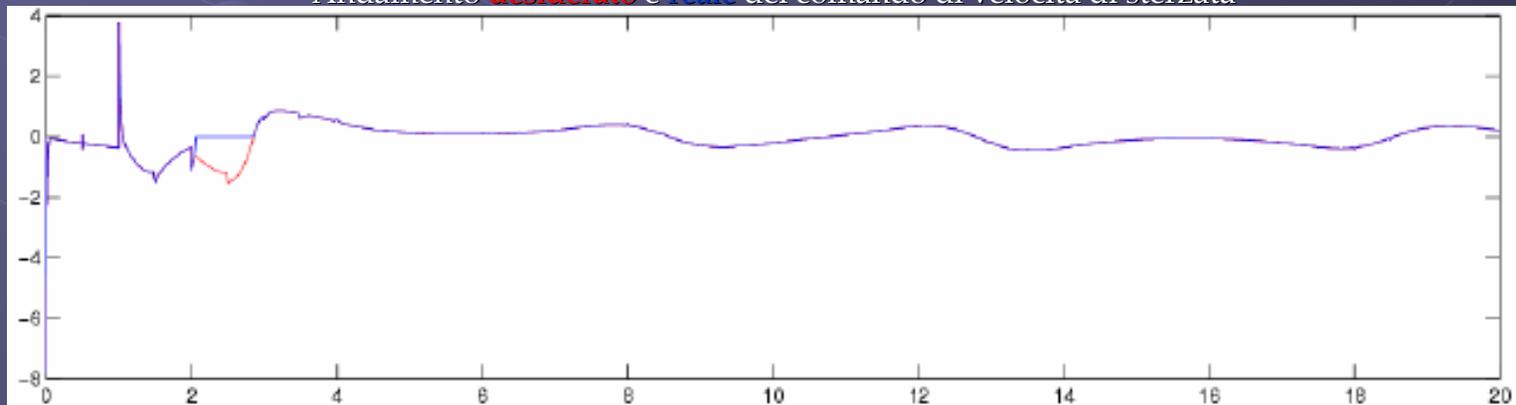
# Simulazioni

## Traiettoria ad otto

Andamento **desiderato** e **reale** del comando di velocità di trazione



Andamento **desiderato** e **reale** del comando di velocità di sterzata



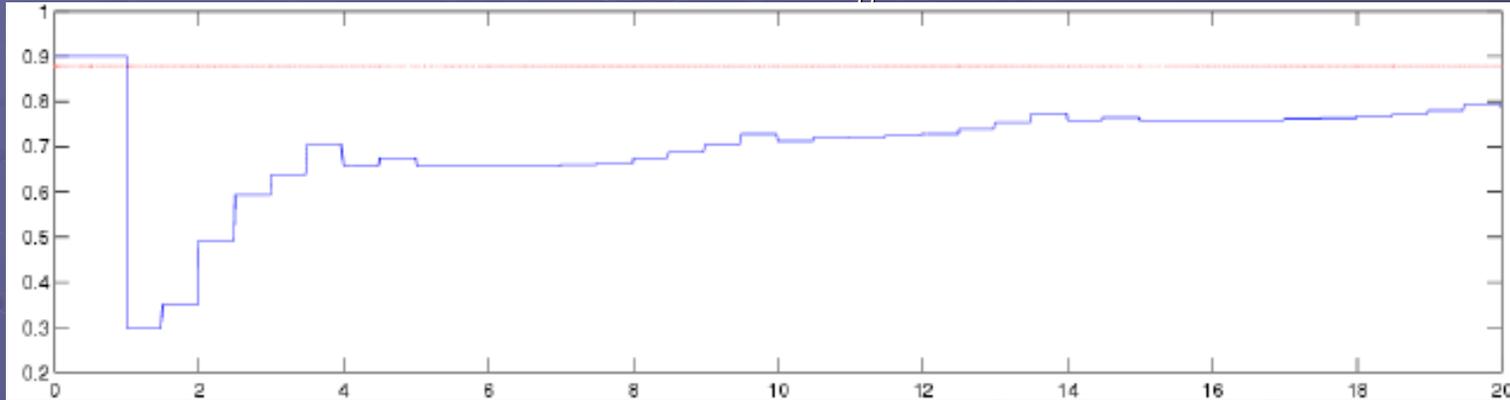
Leggero scostamento dell'angolo di sterzo dall'andamento desiderato (saturazione)



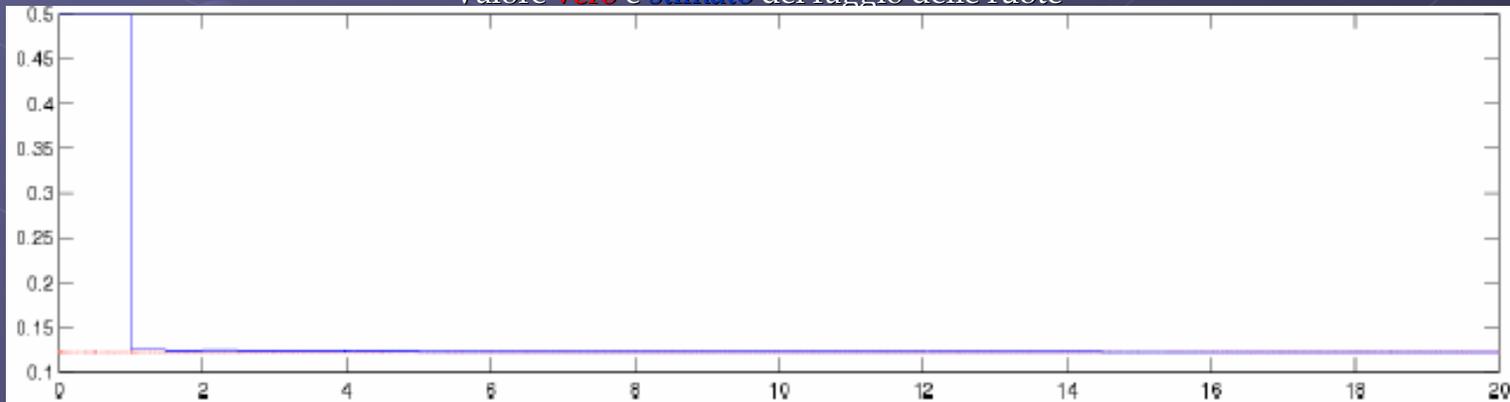
# Simulazioni

## Traiettoria ad otto

Valore **vero** e **stimato** della lunghezza del robot



Valore **vero** e **stimato** del raggio delle ruote



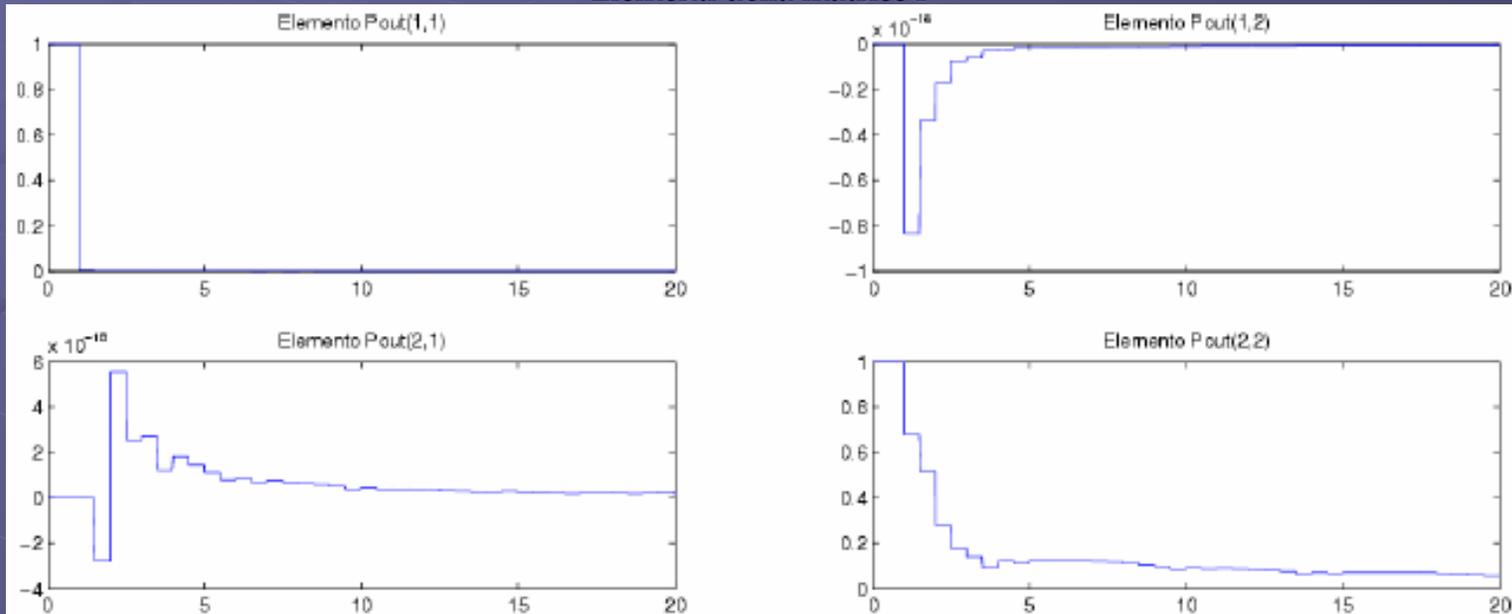
Stima di  $\ell$  più efficace rispetto al caso precedente - l'errore si annulla a regime



# Simulazioni

## Traiettoria ad otto

Elementi della matrice P



L'elemento  $p_{11}$  (stima di  $\rho$ ) decresce velocemente

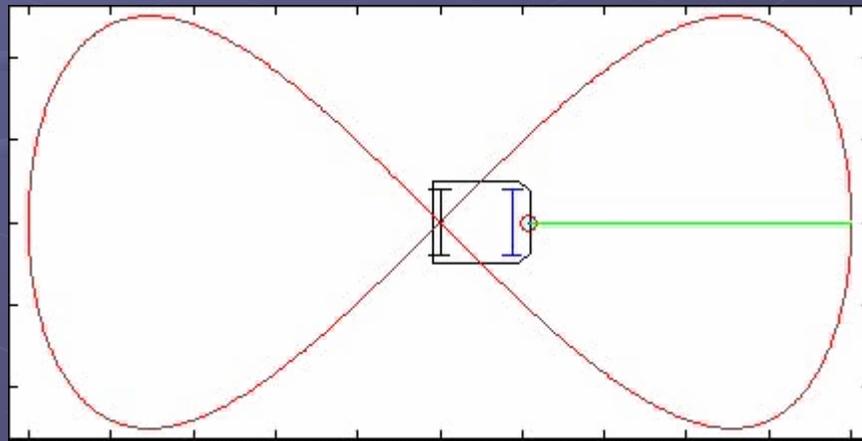
L'elemento  $p_{22}$  (stima di  $\ell$ ) decresce più velocemente rispetto al caso precedente



# Simulazioni

Traiettoria ad otto

Simulazione 2D

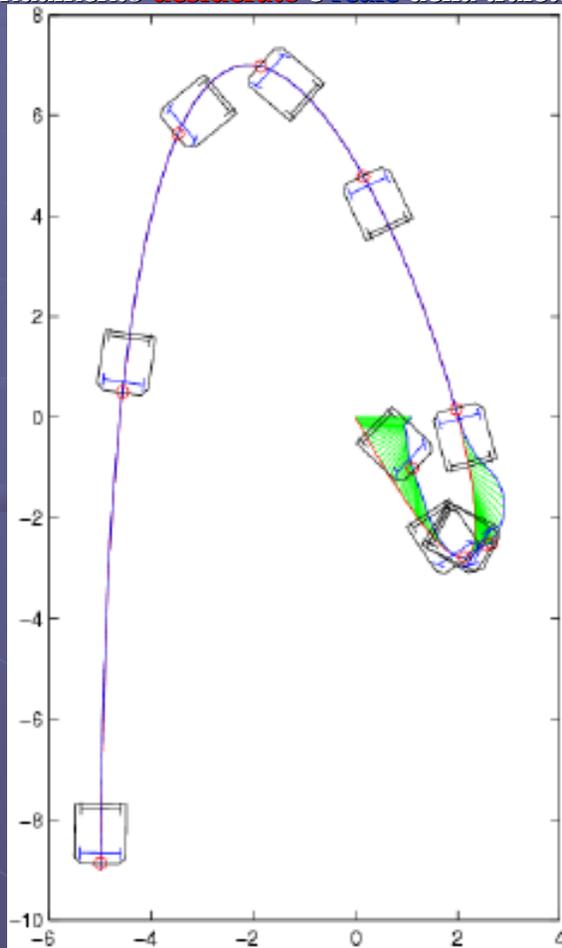




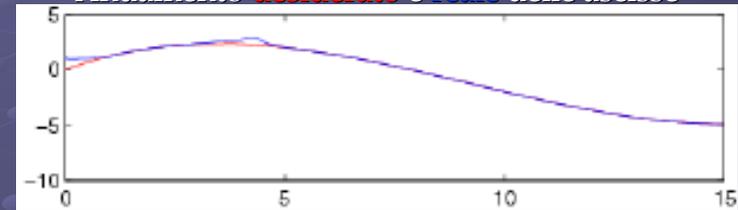
# Simulazioni

## Traiettoria a curvatura variabile

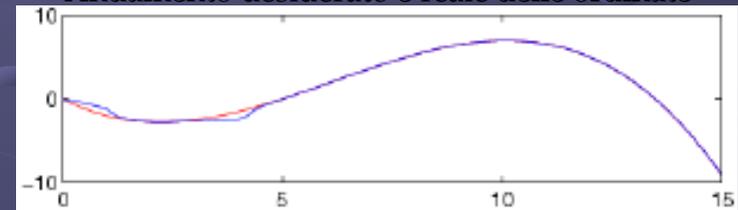
Andamento **desiderato** e **reale** della traiettoria



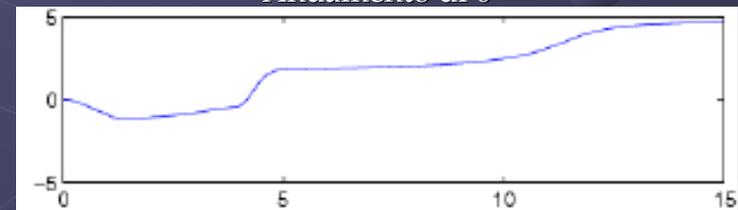
Andamento **desiderato** e **reale** delle ascisse



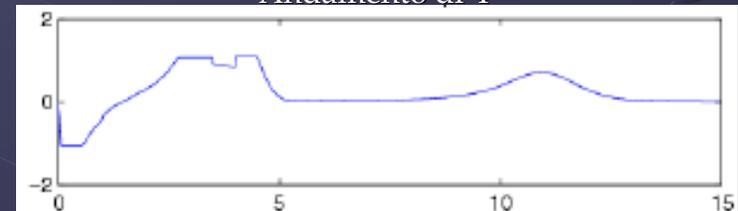
Andamento **desiderato** e **reale** delle ordinate



Andamento di  $\theta$



Andamento di  $\Phi$



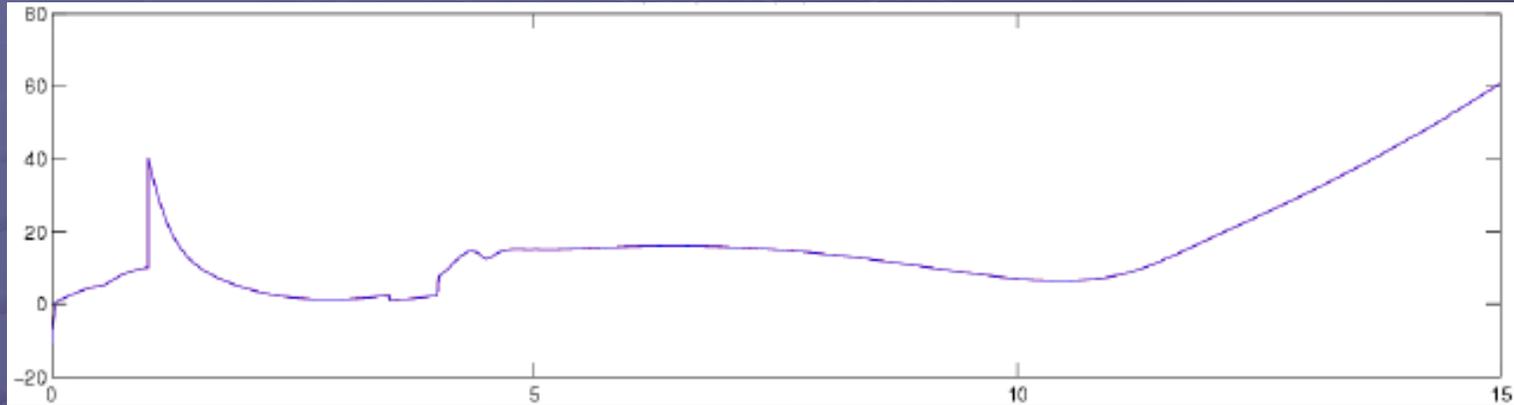
Il robot aggancia la traiettoria



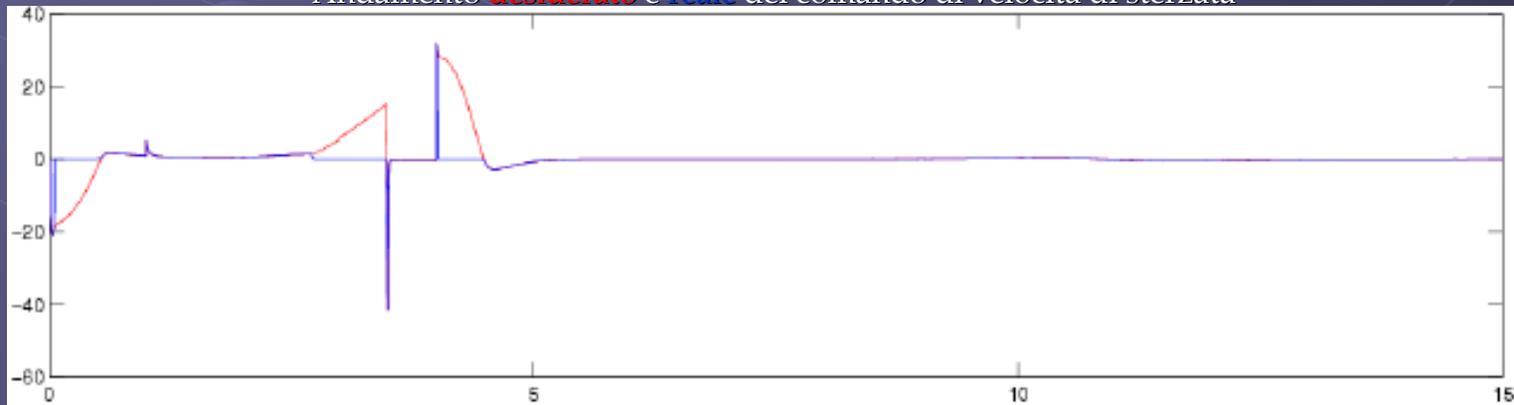
# Simulazioni

## Traiettoria a curvatura variabile

Andamento **desiderato** e **reale** del comando di velocità di trazione



Andamento **desiderato** e **reale** del comando di velocità di sterzata



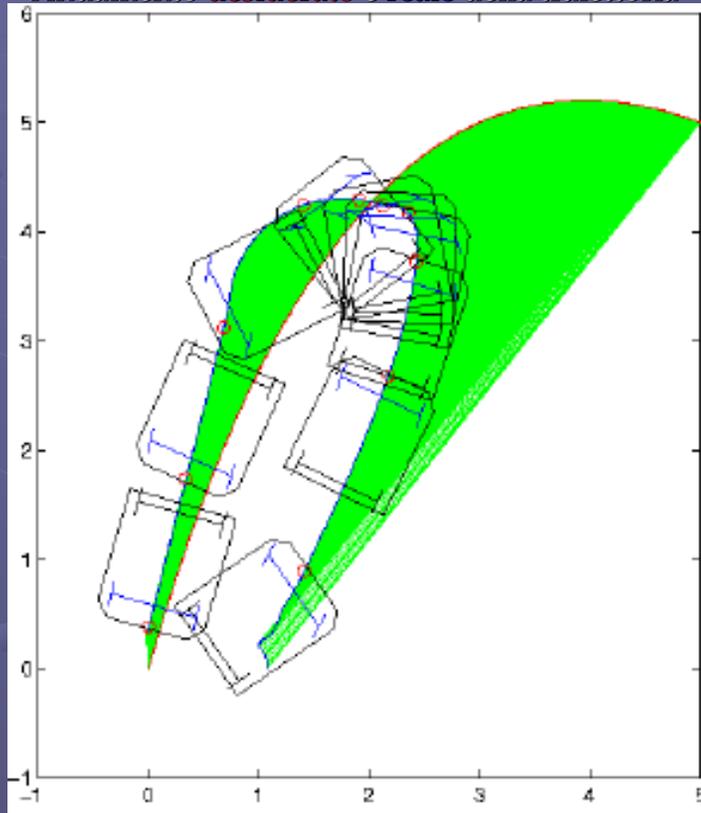
Leggero scostamento dell'angolo di sterzo dall'andamento desiderato (saturazione)



# Simulazioni

Traiettoria curva da (5, 5) a (0, 0)

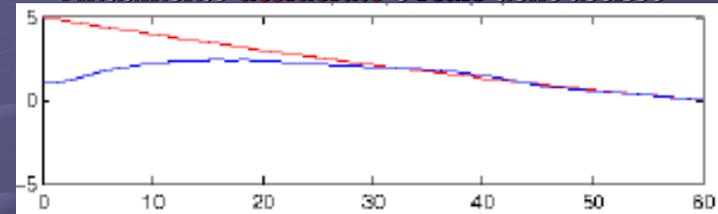
Andamento **desiderato** e **reale** della traiettoria



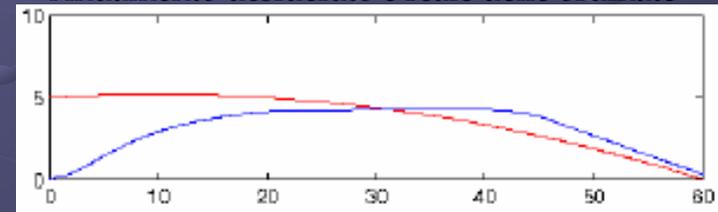
Sterzo in saturazione

Il robot aggancia ugualmente la traiettoria

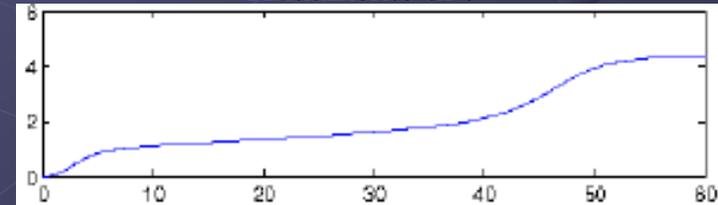
Andamento **desiderato** e **reale** delle ascisse



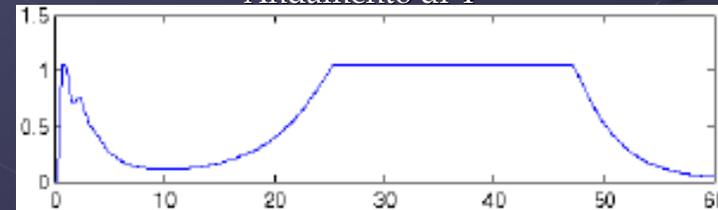
Andamento **desiderato** e **reale** delle ordinate



Andamento di  $\theta$



Andamento di  $\Phi$

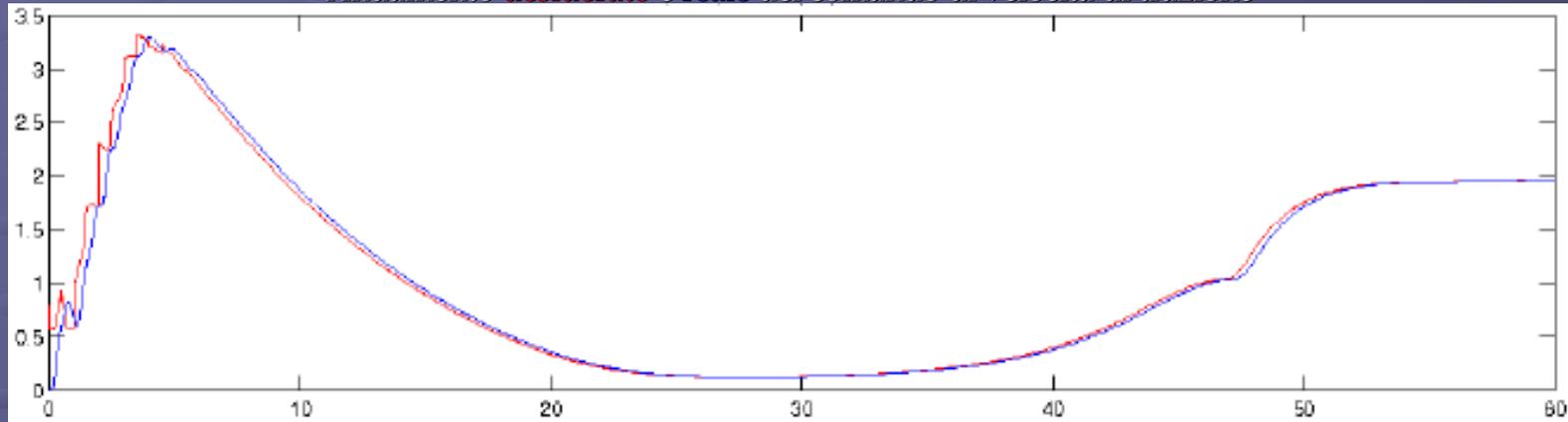




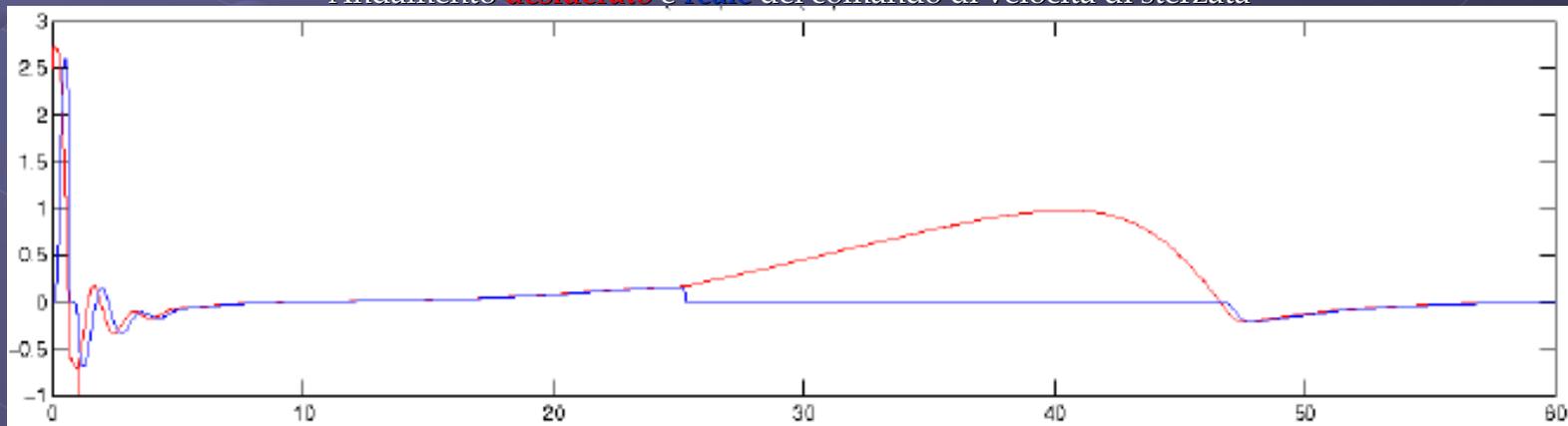
# Simulazioni

Traiettoria curva da (5, 5) a (0, 0)

Andamento **desiderato** e **reale** del comando di velocità di trazione



Andamento **desiderato** e **reale** del comando di velocità di sterzata



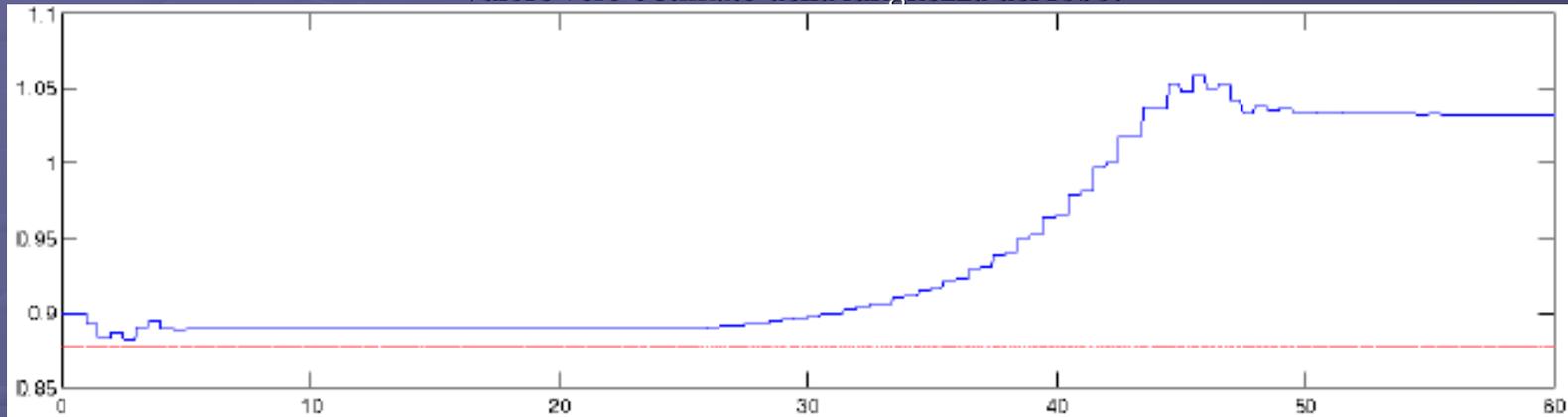
L'andamento reale e quello desiderato coincidono quando  $\Phi$  ritorna nel range ammissibile



# Simulazioni

Traiettoria curva da (5, 5) a (0, 0)

Valore **vero** e **stimato** della lunghezza del robot



Valore **vero** e **stimato** del raggio delle ruote



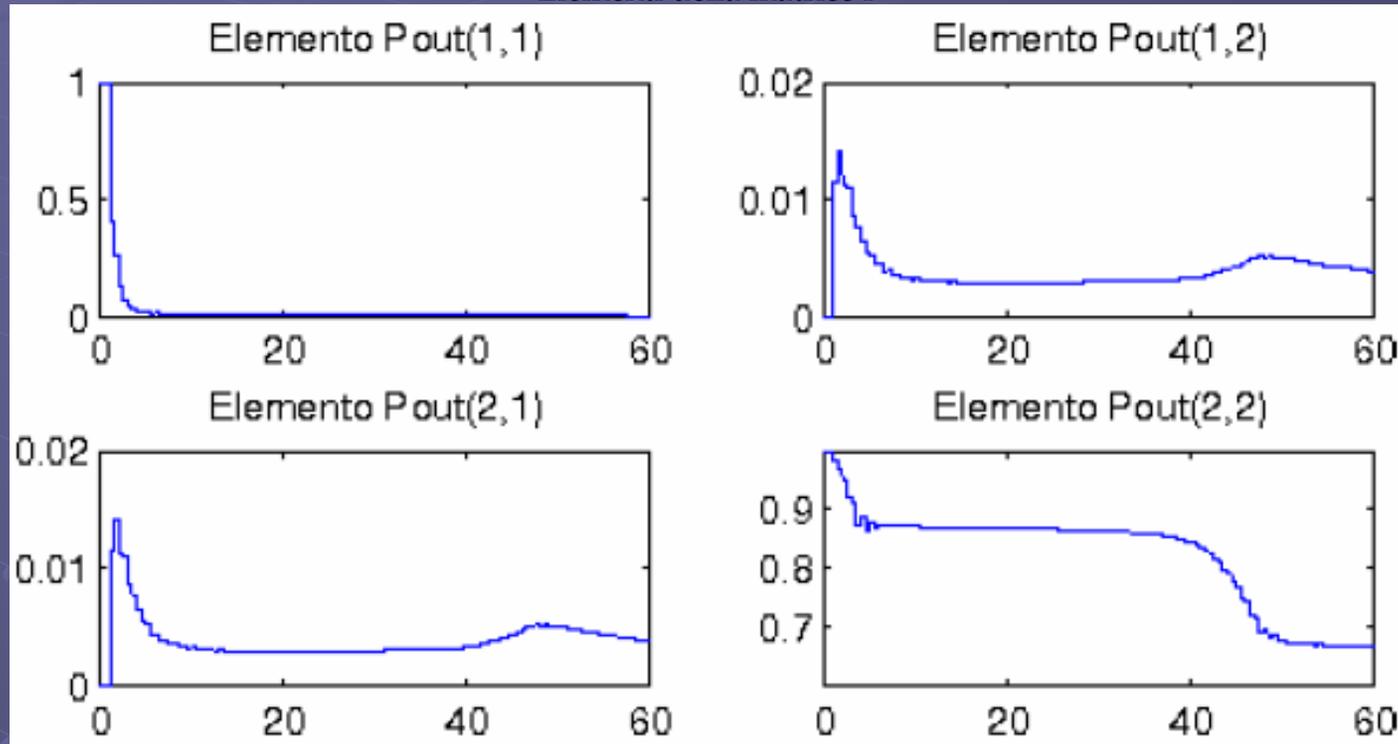
Stima di  $\ell$  più difficile a causa degli effetti degli attuatori non modellati



# Simulazioni

Traiettoria curva da (5, 5) a (0, 0)

Elementi della matrice P



L'elemento  $p_{11}$  (stima di  $\rho$ ) decresce velocemente

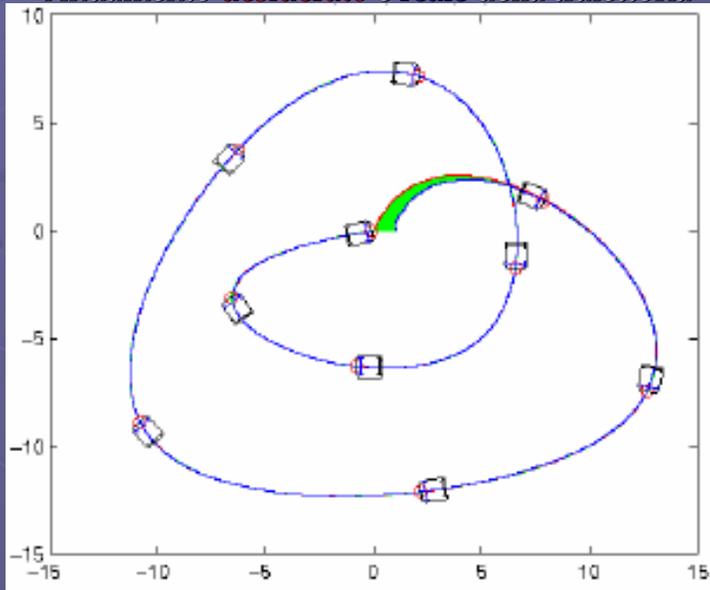
Questo non accade per l'elemento  $p_{22}$  (stima di  $\ell$ )!



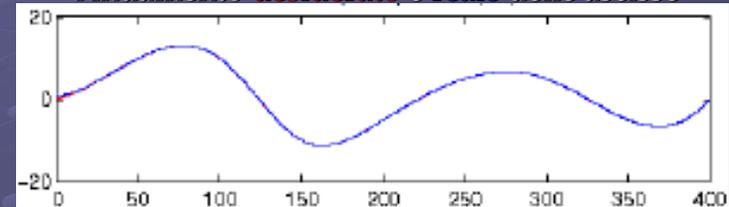
# Simulazioni

## Traiettoria lenta

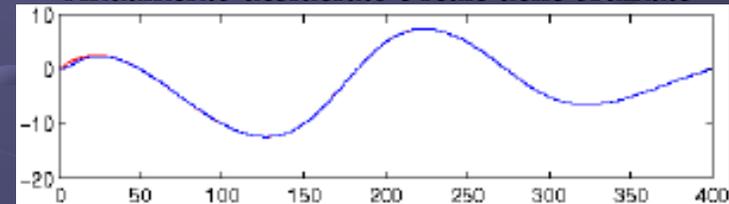
Andamento **desiderato** e **reale** della traiettoria



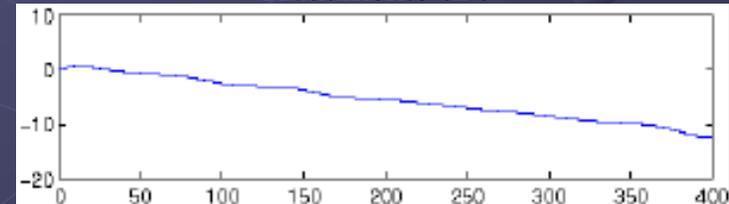
Andamento **desiderato** e **reale** delle ascisse



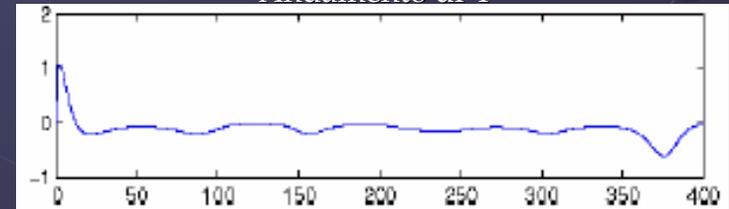
Andamento **desiderato** e **reale** delle ordinate



Andamento di  $\theta$



Andamento di  $\Phi$



La traiettoria viene eseguita senza problemi

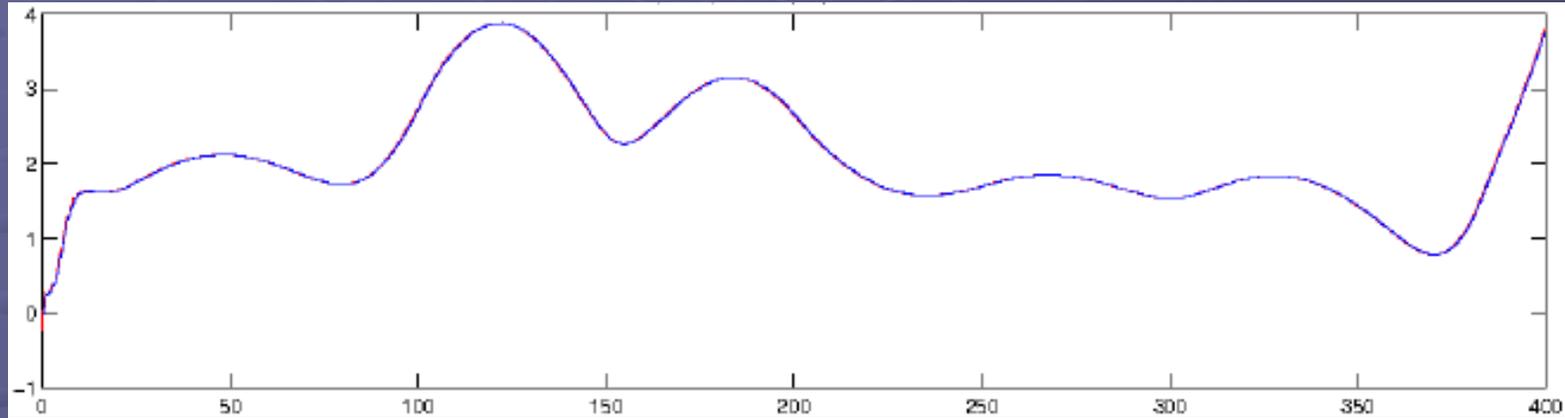
L'errore iniziale viene annullato



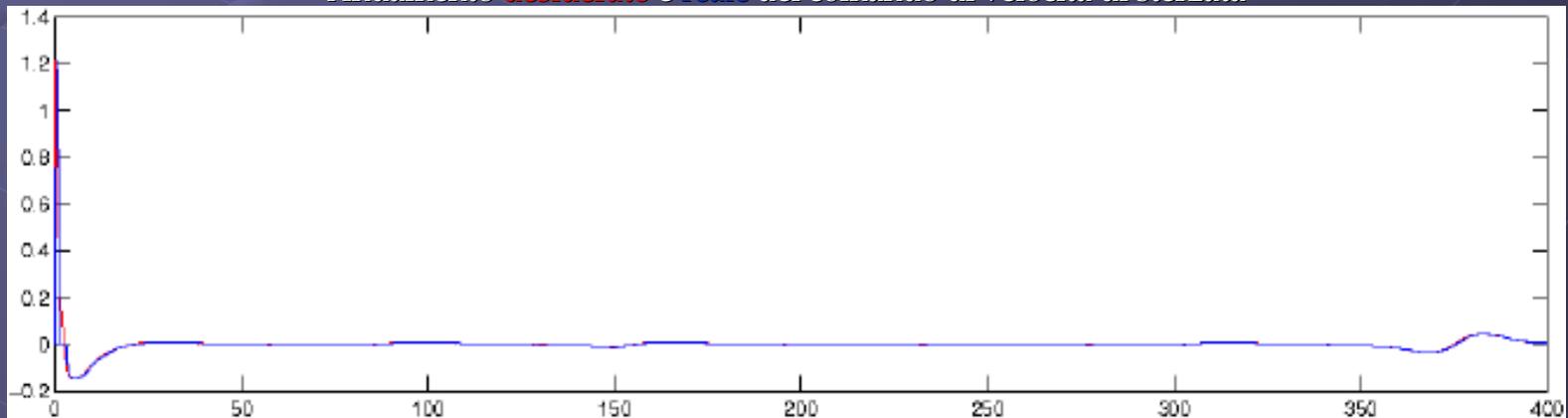
# Simulazioni

## Traiettoria lenta

Andamento **desiderato** e **reale** del comando di velocità di trazione



Andamento **desiderato** e **reale** del comando di velocità di sterzata



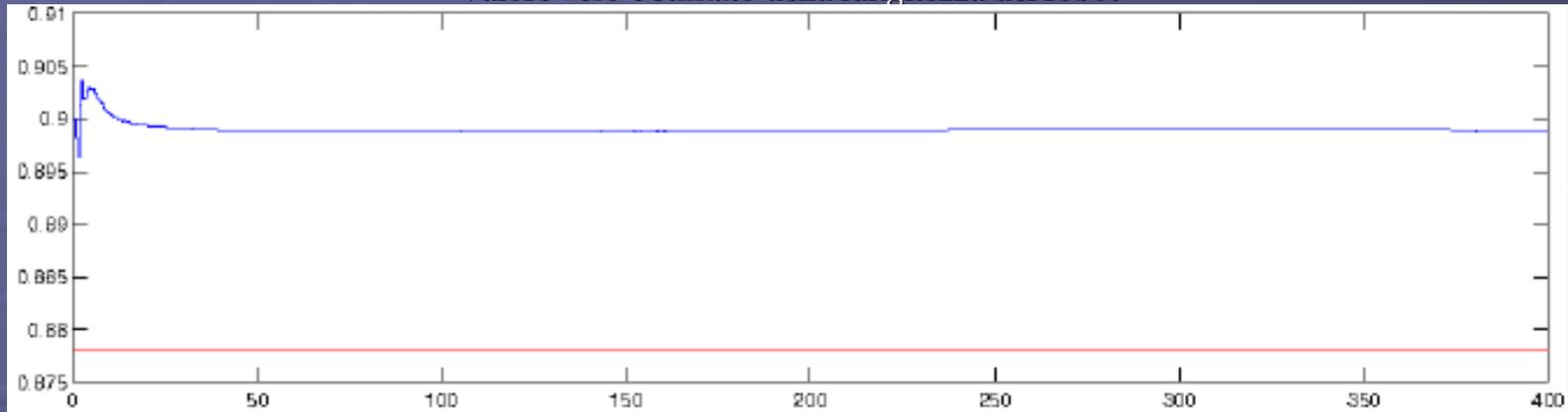
L'effetto degli attuatori è ininfluente (a parte nell'istante iniziale)



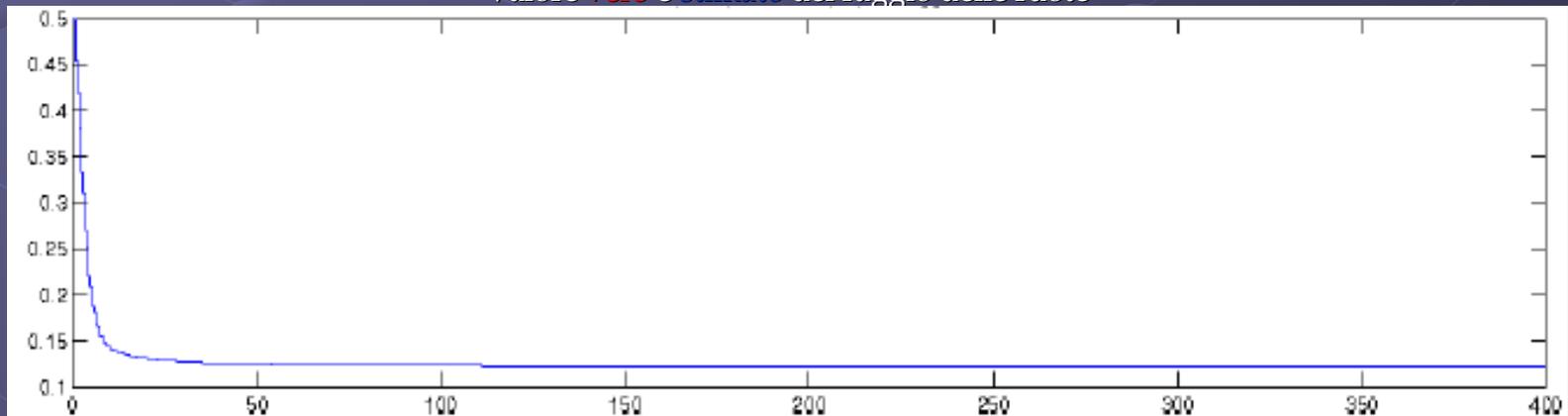
# Simulazioni

## Traiettoria lenta

Valore **vero** e **stimato** della lunghezza del robot



Valore **vero** e **stimato** del raggio delle ruote



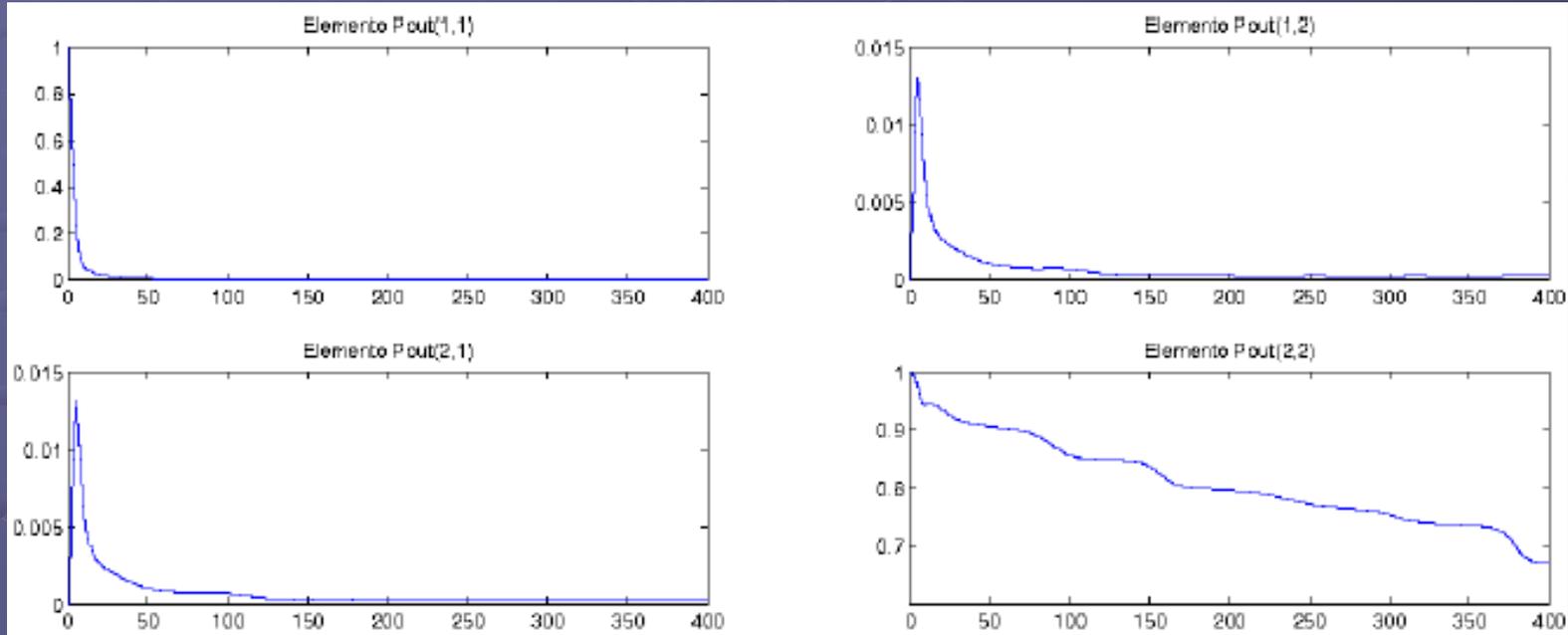
Stima di  $\ell$  più difficile a causa degli effetti degli attuatori non modellati – dipende anche da  $\ell_0$



# Simulazioni

Traiettoria lenta

Elementi della matrice P



L'elemento  $p_{11}$  (stima di  $\rho$ ) decresce velocemente

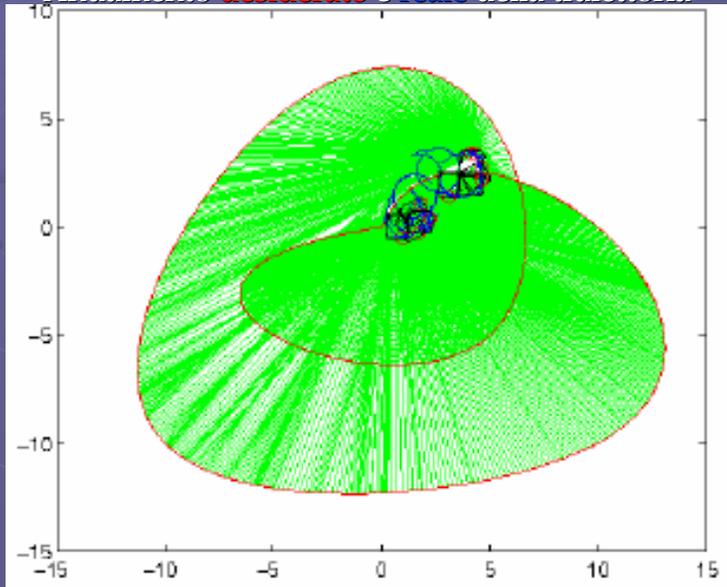
Questo non accade per l'elemento  $p_{22}$  (stima di  $\ell$ )!



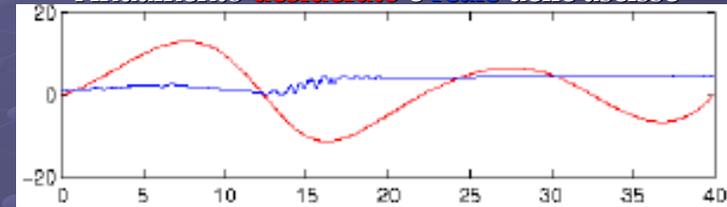
# Simulazioni

## Traiettoria veloce

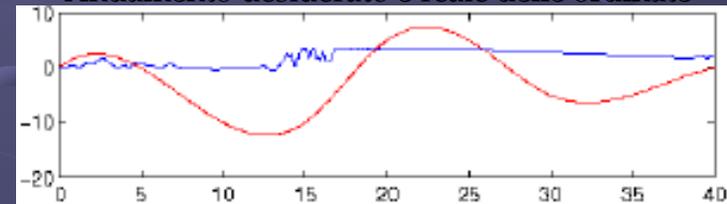
Andamento **desiderato** e **reale** della traiettoria



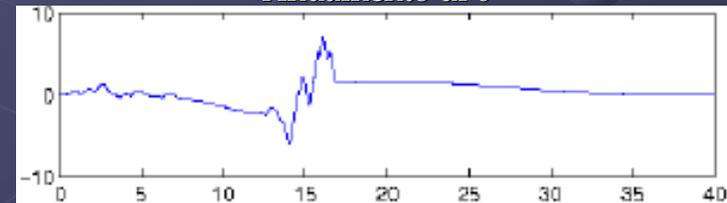
Andamento **desiderato** e **reale** delle ascisse



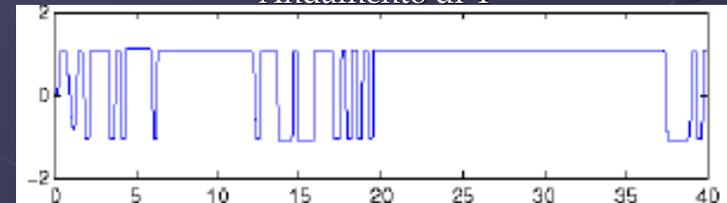
Andamento **desiderato** e **reale** delle ordinate



Andamento di  $\theta$



Andamento di  $\Phi$



La traiettoria non viene eseguita

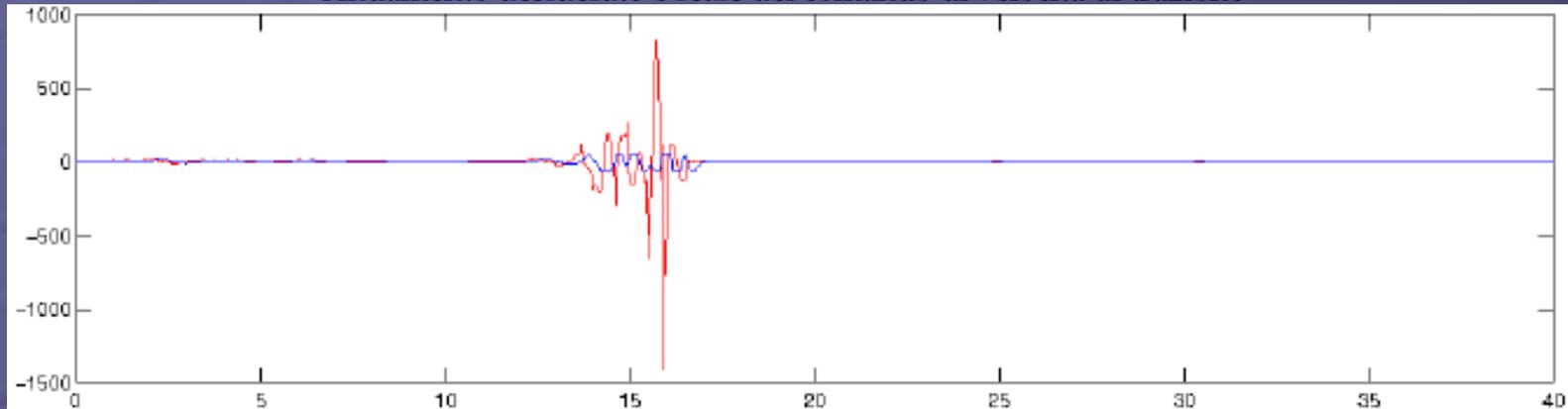
Presenza di instabilità!



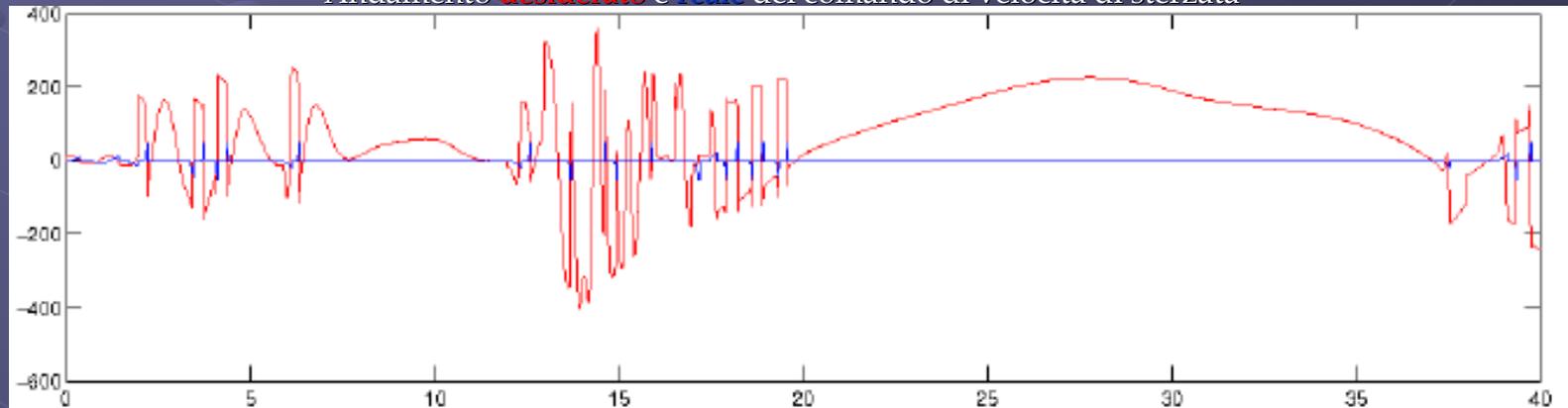
# Simulazioni

## Traiettoria veloce

Andamento **desiderato** e **reale** del comando di velocità di trazione



Andamento **desiderato** e **reale** del comando di velocità di sterzata



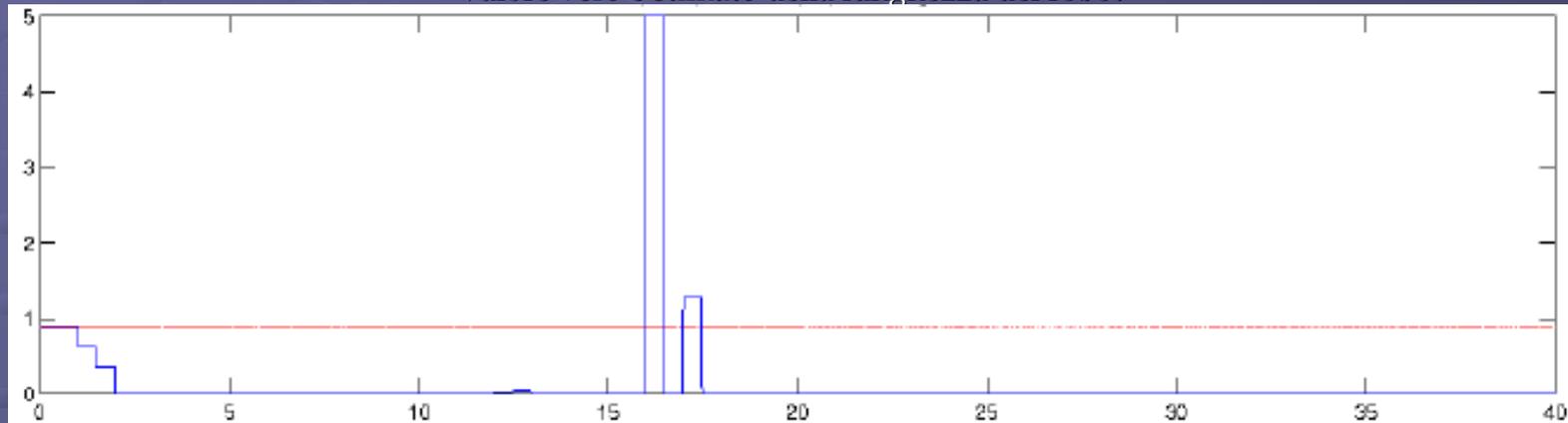
La velocità angolare dello sterzo viene continuamente annullata a causa del limite su  $\Phi$



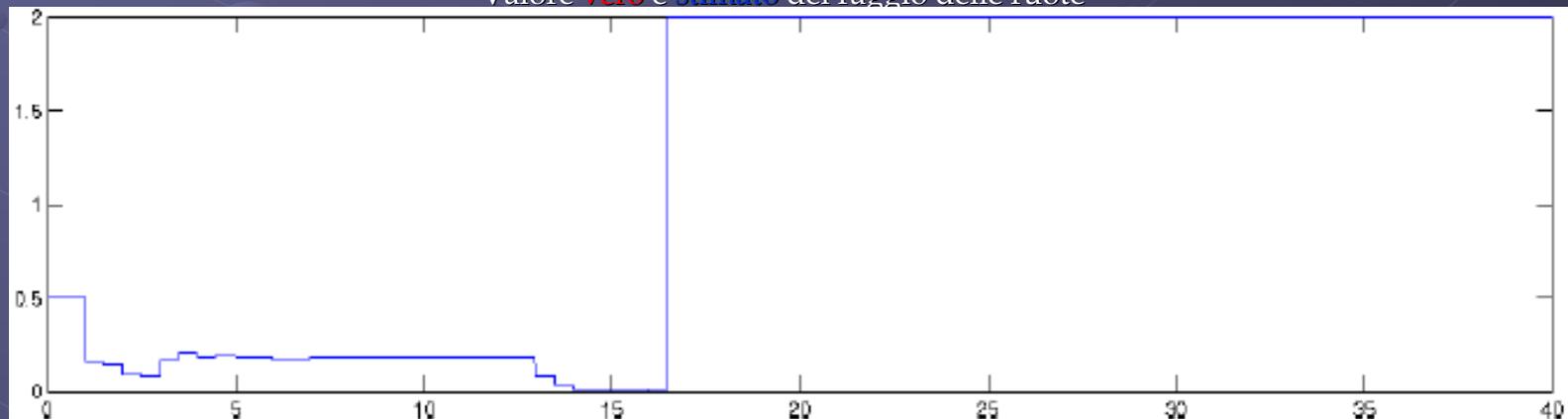
# Simulazioni

## Traiettoria veloce

Valore **vero** e **stimato** della lunghezza del robot



Valore **vero** e **stimato** del raggio delle ruote



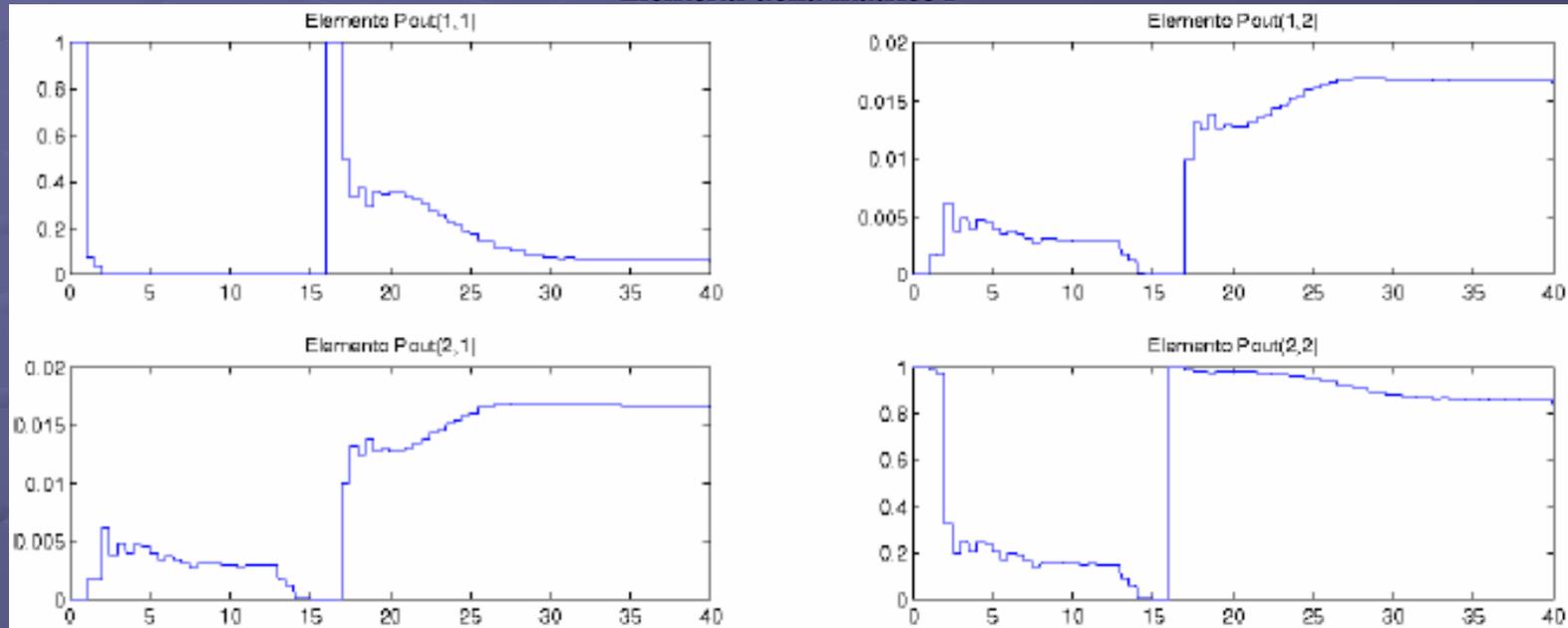
Stima di  $\ell$  e  $\rho$  errata - valore limitato grazie alla proiezione



# Simulazioni

## Traiettoria veloce

Elementi della matrice P



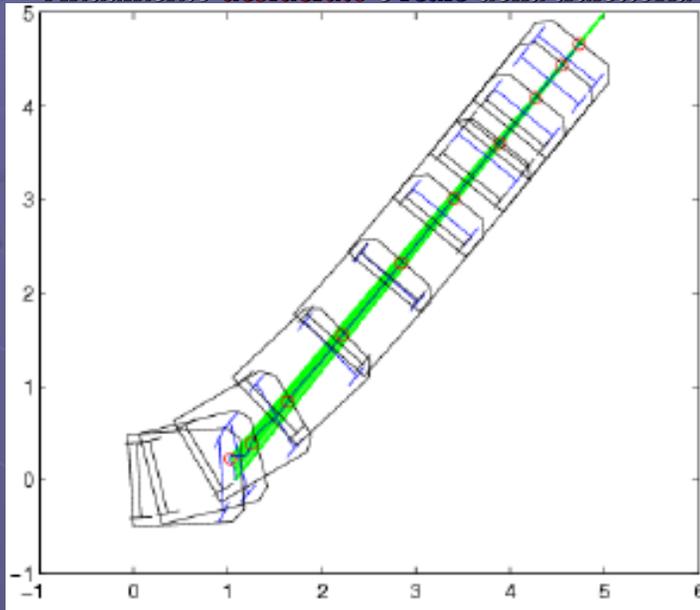
La matrice P viene "resettata" alla matrice identità ogniqualvolta la sua norma scende sotto una soglia prefissata ( $10^{-4}$ )



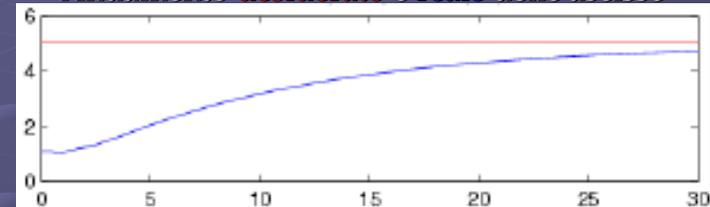
# Simulazioni

## Posizionamento tramite tracking adattativo

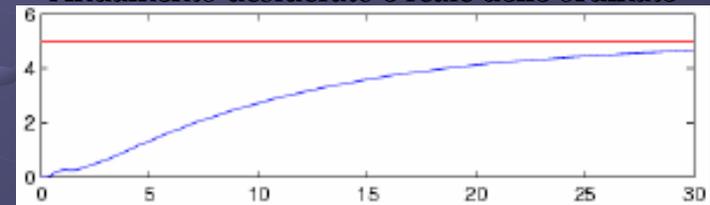
Andamento **desiderato** e **reale** della traiettoria



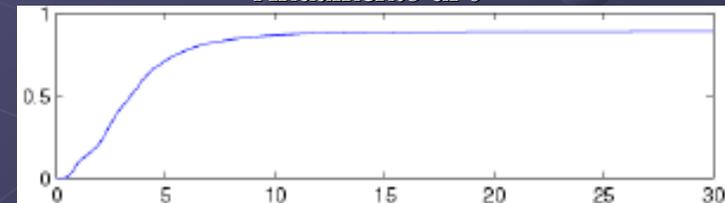
Andamento **desiderato** e **reale** delle ascisse



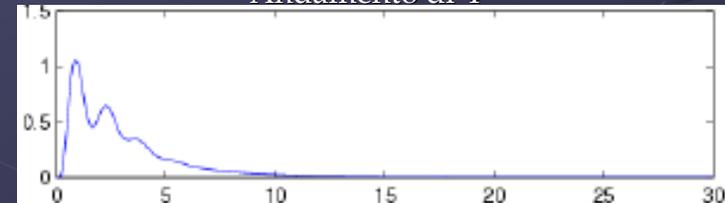
Andamento **desiderato** e **reale** delle ordinate



Andamento di  $\theta$



Andamento di  $\Phi$



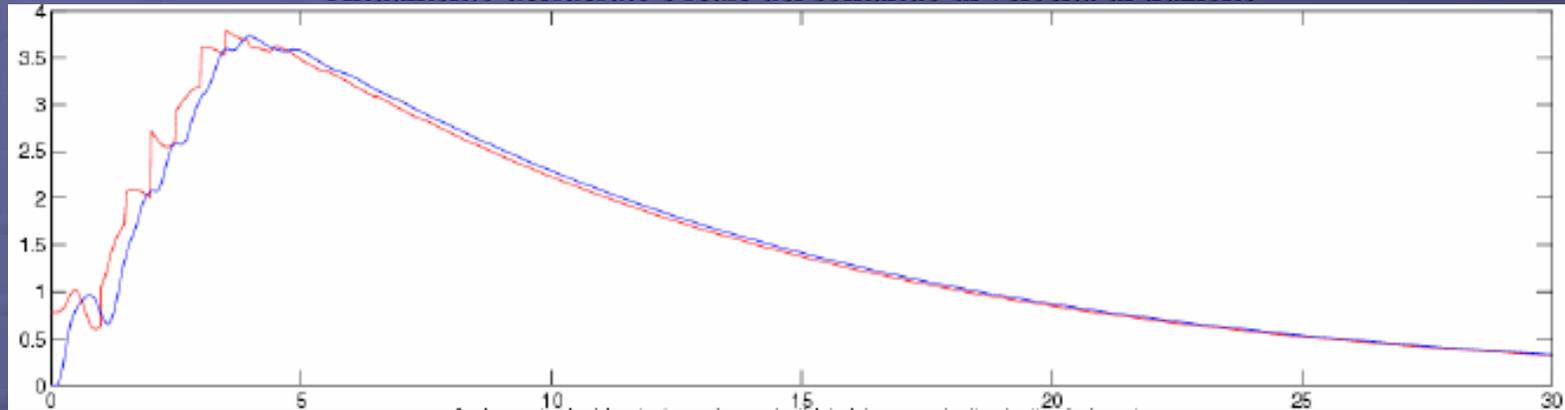
La traiettoria viene eseguita senza problemi  
errore nullo senza instabilità



# Simulazioni

## Posizionamento tramite tracking adattativo

Andamento **desiderato** e **reale** del comando di velocità di trazione



Andamento **desiderato** e **reale** del comando di velocità di sterzata



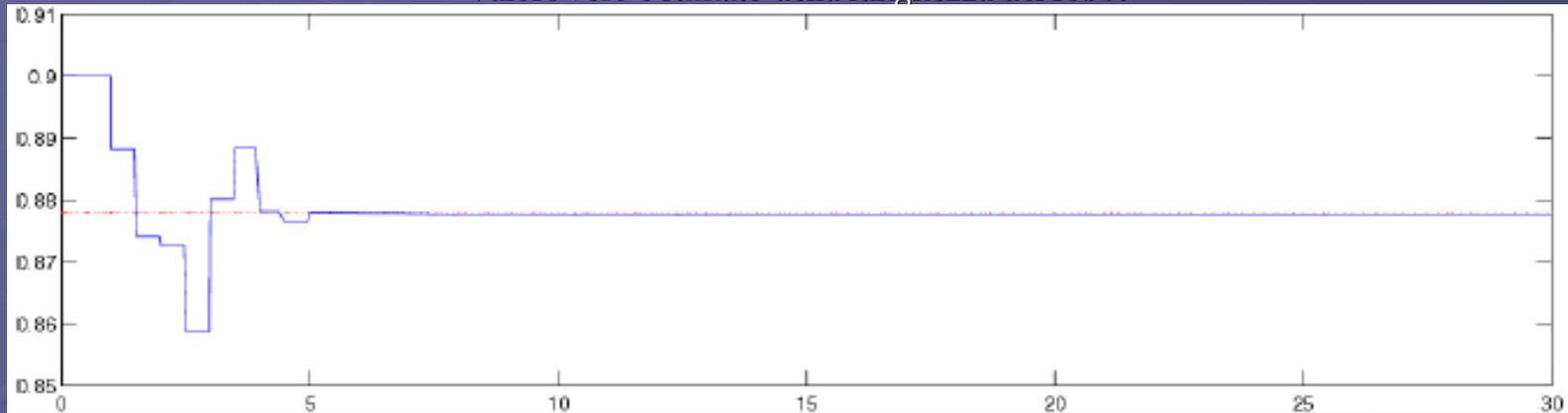
Le velocità di comando vengono impartite senza grossi scostamenti dal comportamento desiderato



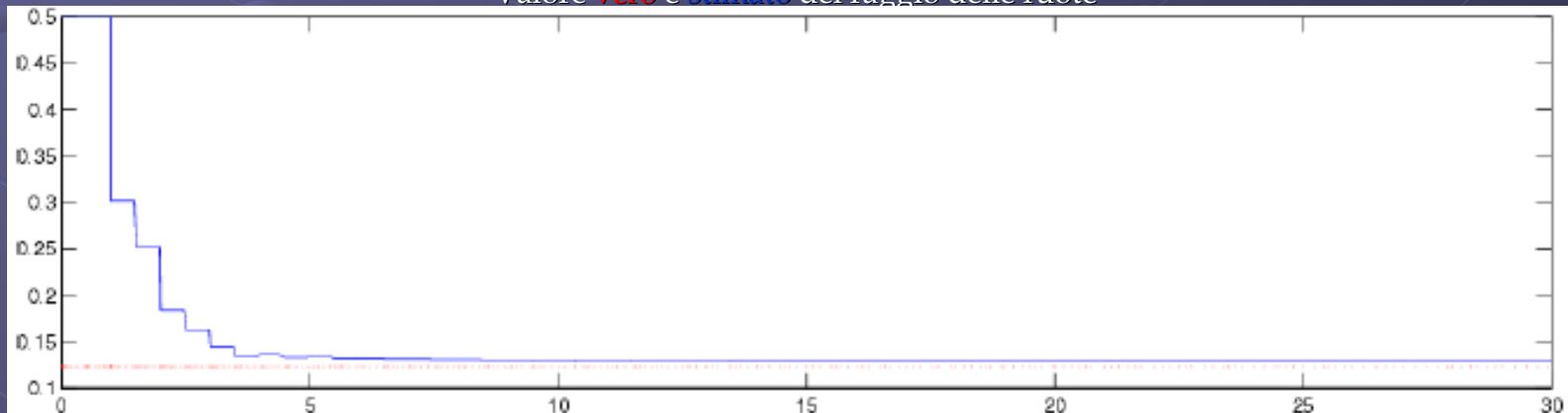
# Simulazioni

## Posizionamento tramite tracking adattativo

Valore **vero** e **stimato** della lunghezza del robot



Valore **vero** e **stimato** del raggio delle ruote



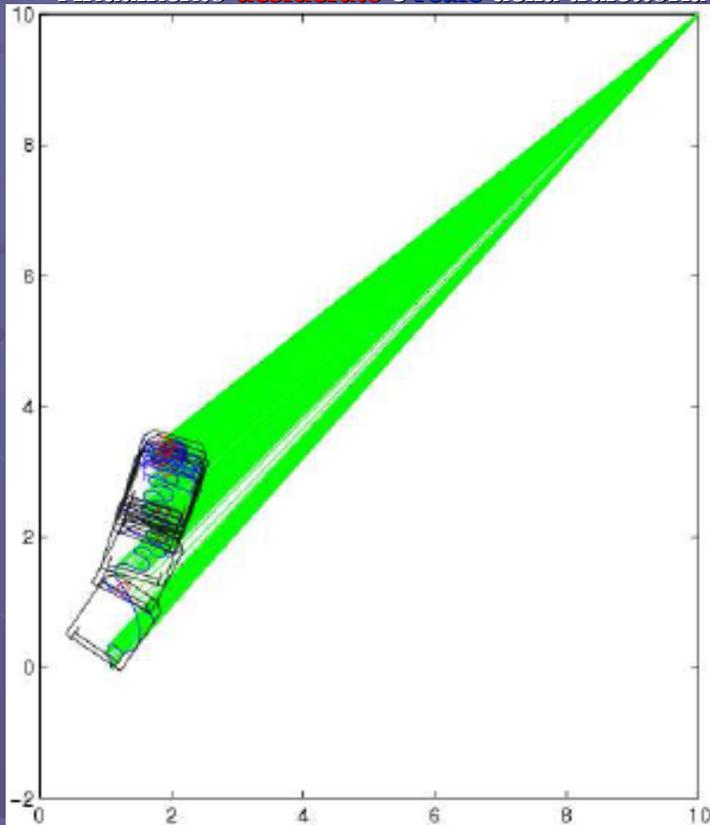
Stima di  $\ell$  e  $\rho$  accettabile



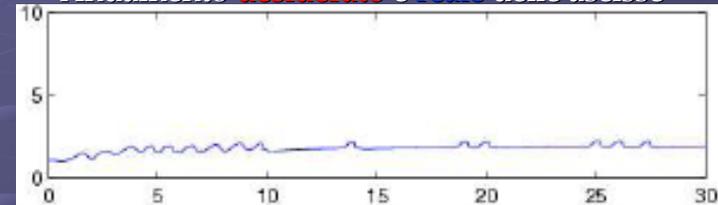
# Simulazioni

Posizionamento tramite tracking adattativo con scaling temporale

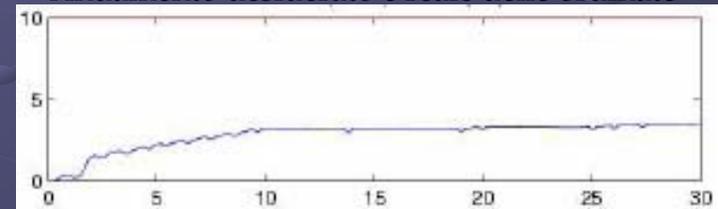
Andamento **desiderato** e **reale** della traiettoria



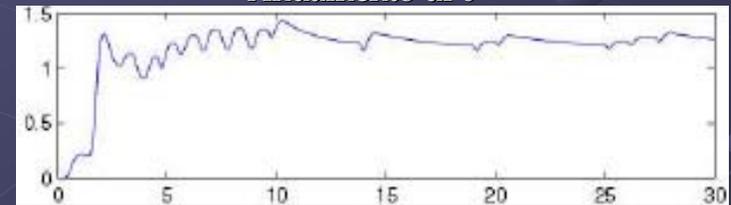
Andamento **desiderato** e **reale** delle ascisse



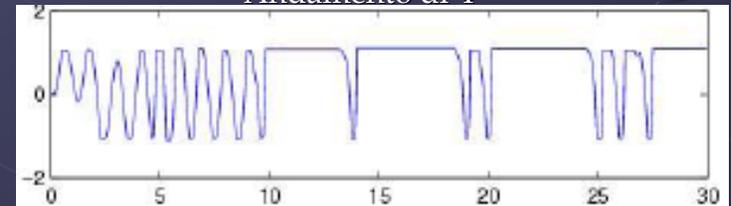
Andamento **desiderato** e **reale** delle ordinate



Andamento di  $\theta$



Andamento di  $\Phi$



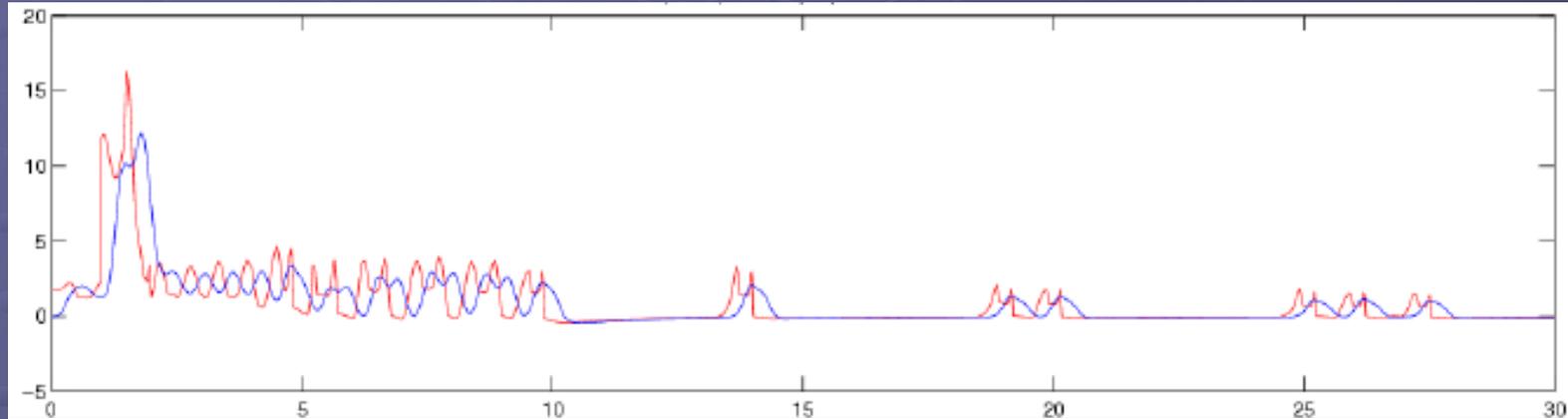
La traiettoria viene portata fino al punto (10,10)  
presenza di oscillazioni - instabilità!



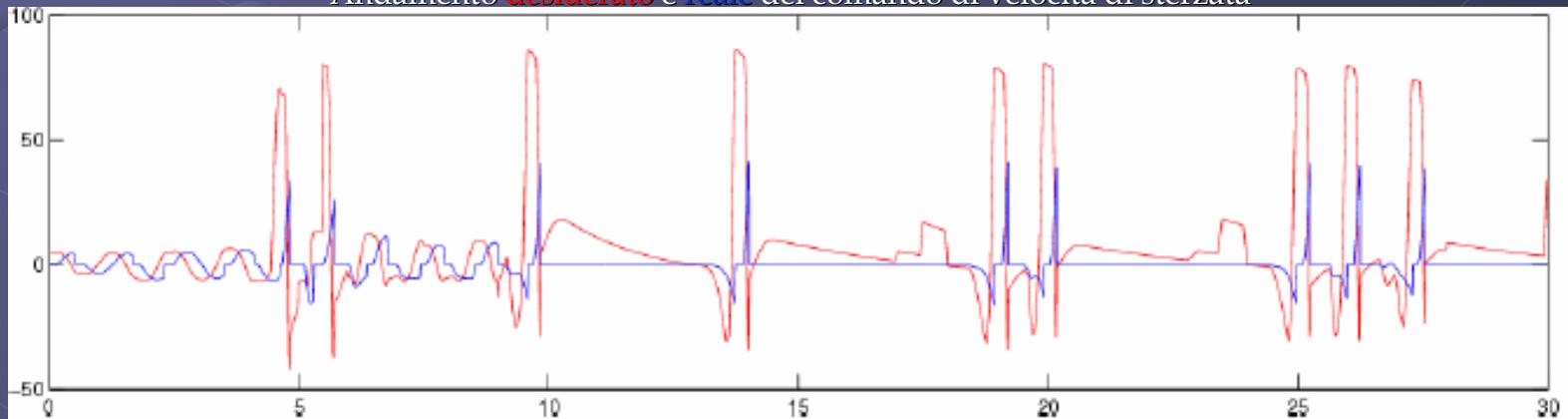
# Simulazioni

Posizionamento tramite tracking adattativo con scaling temporale

Andamento **desiderato** e **reale** del comando di velocità di trazione



Andamento **desiderato** e **reale** del comando di velocità di sterzata



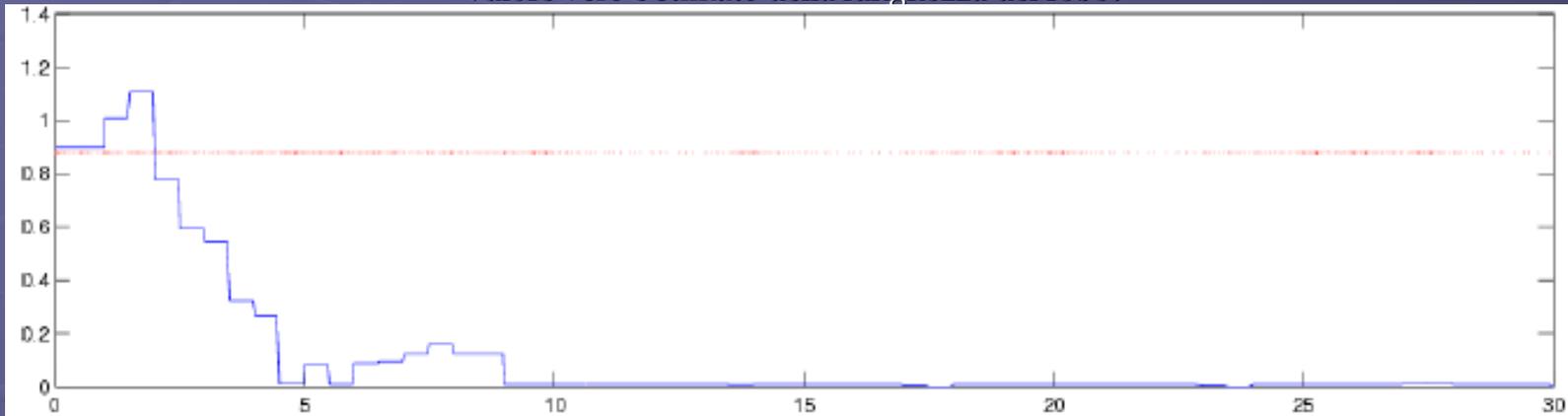
L'effetto delle non linearità e dei ritardi degli attuatori inducono la instabilità



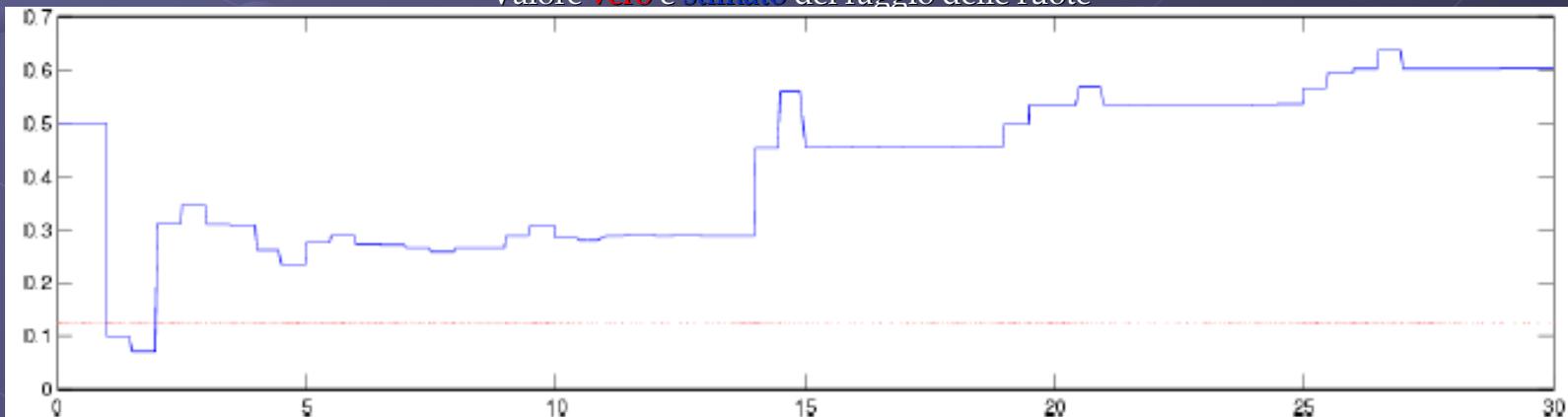
# Simulazioni

Posizionamento tramite tracking adattativo con scaling temporale

Valore **vero** e **stimato** della lunghezza del robot



Valore **vero** e **stimato** del raggio delle ruote

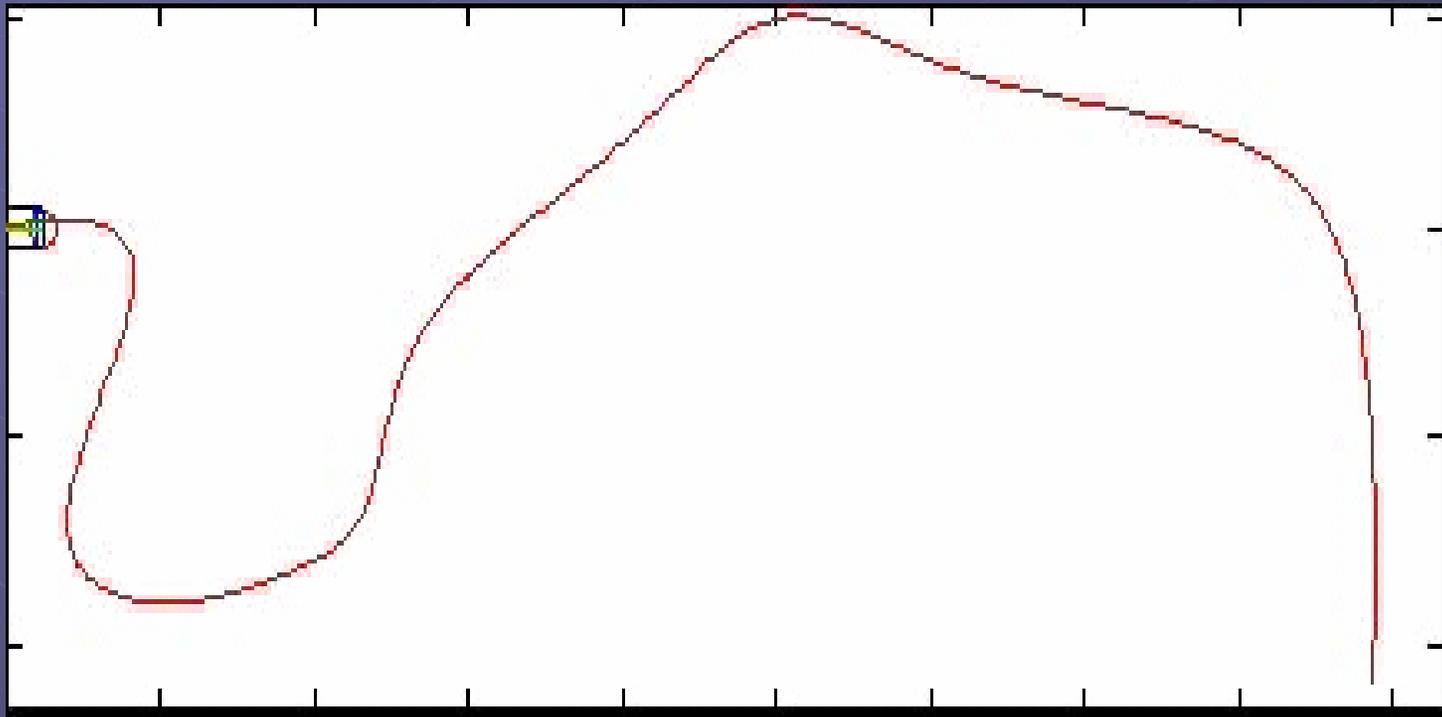


Stima di  $\ell$  e  $\rho$  errate – si può migliorare riducendo il tempo di risposta degli attuatori



# Simulazioni

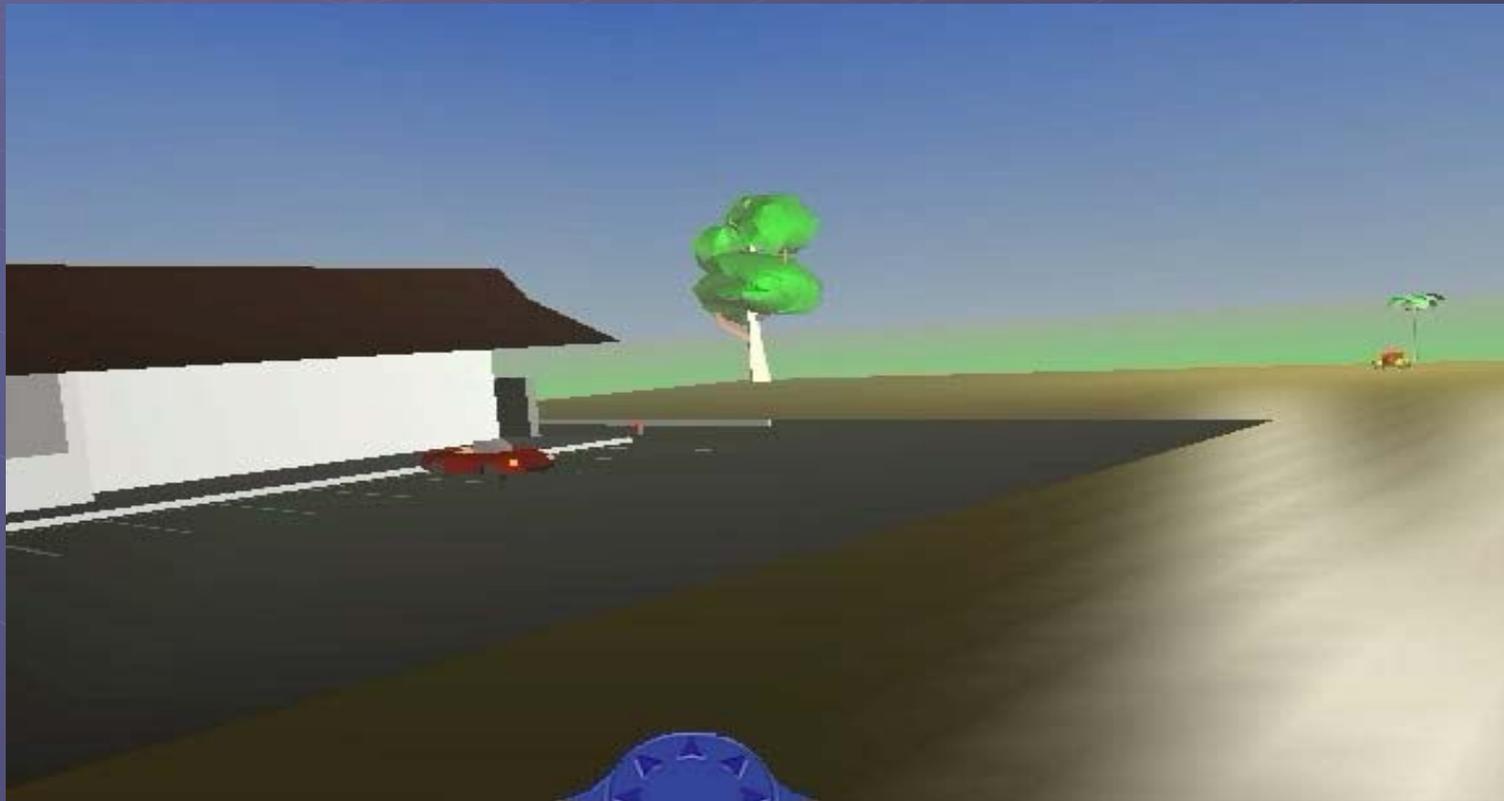
Simulazione 2D del Car-Like





# Simulazioni

Simulazione 3D del Car-Like





# Considerazioni finali

➤ Trasformazione lineare mediante feedback linearizzazione

➤ Identificazione e stima dei parametri da inviare al controllore

➤ la stima avviene mediante un'approssimazione lineare ovvero attraverso una trasformazione dei parametri al fine di rendere le equazioni dinamiche lineari rispetto ai parametri da controllare

➤ questo porta ad una stima diversa dal valore vero dei parametri

➤ l'errore, in presenza di traiettorie ammissibili, tende comunque a zero



# Considerazioni finali

## Vantaggi del controllo adattativo

➤ Misure dei parametri non necessariamente accurati  
( $\ell_0$  ed  $\rho_0$  prossimi ai valori veri)

➤ Possibilità di riutilizzo del controllore su robot di dimensioni diverse

## Caratteristiche di robustezza del controllo adattativo

➤ Il controllore non tiene conto dei limiti sull'angolo di sterzo

➤ Il controllore non tiene conto delle velocità massime degli attuatori

➤ Il controllore non tiene conto della dinamica degli attuatori