



Tracking Adattativo di un Robot Car-Like mediante Feedback Linearization

Lorenzo Magliocchetti
Arrigo Marchiori
Michele Marino



Sommario

- Descrizione del problema
- Modello cinematico
- Feedback linearization
- Adattamento e stimatore
- Simulazioni
- Considerazioni finali

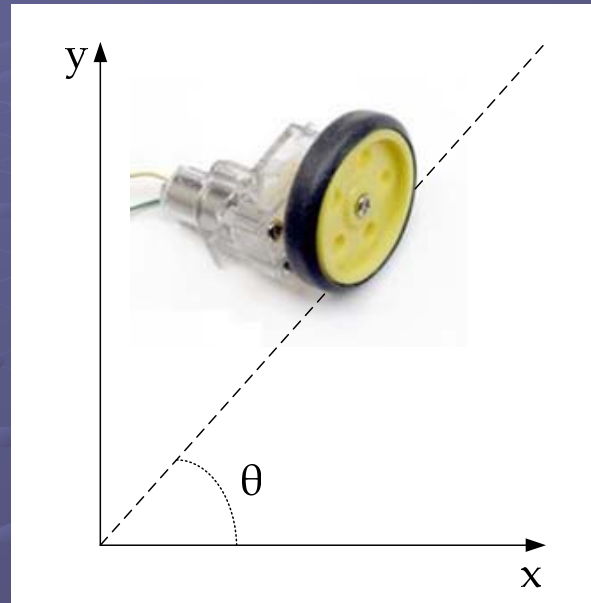


Descrizione del problema

- Progettazione e simulazione di un sistema di controllo per un robot Car-Like tramite tecnica del feedback
- Esecuzione del task anche in presenza di disturbi
- Ricostruzione dello stato mediante sensori
- Inseguimento di una traiettoria supposta ammissibile
- Riduzione a zero dell'errore



Modello cinematico dell'uniciclo



Vincolo Pfaffiano:

$$\begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = 0$$

Modello cinematico:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} \rho \omega_r + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega_s$$



Modello cinematico del Car-Like

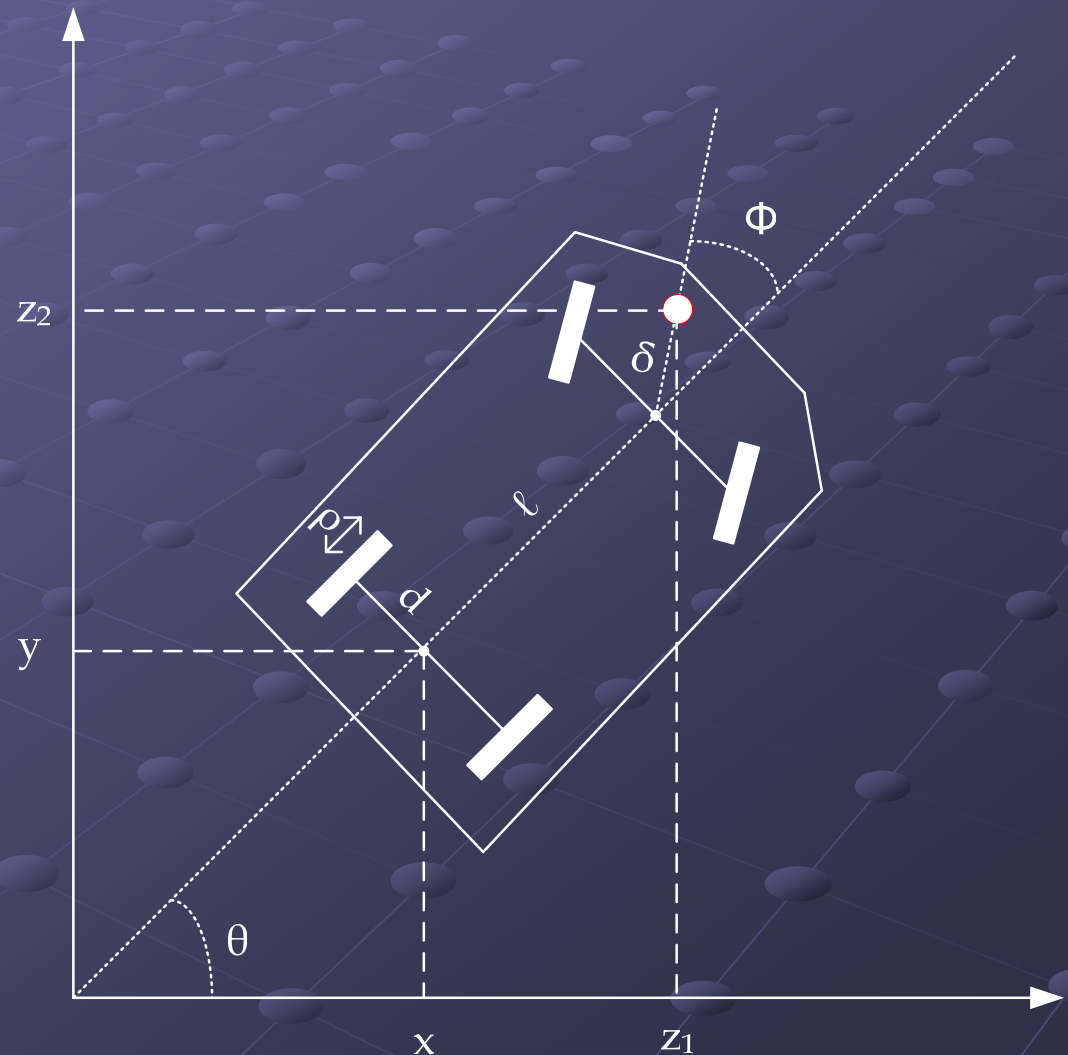
Soggetto ai vincoli anolonomi:

$$\dot{x}_f s_{\theta\phi} - \dot{y}_f c_{\theta\phi} = 0$$

$$\dot{x}s_{\theta} - \dot{y}c_{\theta} = 0$$

Modello cinematico del robot:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{\theta} \\ s_{\theta} \\ t_{\phi} / \ell \\ 0 \end{bmatrix} \rho \omega_r + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega_s$$





Feedback linearization

Sistema non lineare:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)v$$

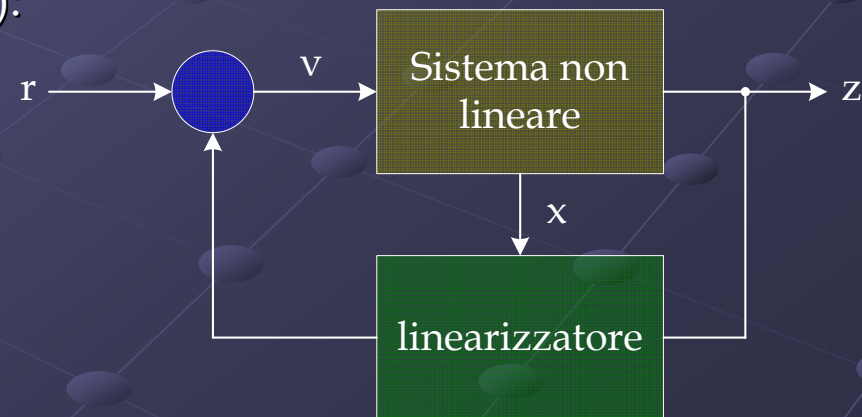
$$z = h(x)$$

Grado relativo 1, derivando z l'ingresso compare nell'uscita:

$$\dot{z} = \left(\frac{\partial h(x)}{\partial x} \right)^T \dot{x} \quad \dot{z} = L_f h(x) + L_g h(x)v$$

Equazioni del sistema di controllo (d=1):

$$\begin{cases} \dot{z} = r \\ v = \frac{1}{L_g h(x)} \left(-L_f h(x) + r \right) \end{cases}$$





Static feedback linearization ^{1/2}

Scelta naturale per $z=(x,y)'$ che porta alla seguente linearizzazione:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \rho c_\theta & 0 \\ \rho s_\theta & 0 \end{bmatrix} v = A(\theta)v \quad \leftarrow \text{Matrice } A \text{ singolare!}$$

Si sceglie un punto P a distanza Δ dal centro dell'asse anteriore

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \left(c_\theta - t_\phi \left(s_\theta + \frac{\delta s_{\theta\phi}}{\ell} \right) \right) \rho & -\delta s_{\theta\phi} \\ \left(s_\theta + t_\phi \left(c_\theta + \frac{\delta c_{\theta\phi}}{\ell} \right) \right) \rho & \delta c_{\theta\phi} \end{bmatrix} v = A(\theta, \phi)v$$

dalla quale si ottengono gli ingressi di controllo

$$v = A^{-1}(\theta, \phi)r \quad \dot{z} = r$$



Static feedback linearization ^{2/2}

Controllo di tipo PD con derivata di feedforward:

$$\begin{cases} r_1 = \dot{z}_{d1} + k_{p1}(z_{d1} - z_1) \\ r_2 = \dot{z}_{d2} + k_{p2}(z_{d2} - z_2) \end{cases}$$

Esiste una dinamica interna legata alle variabili θ e Φ !

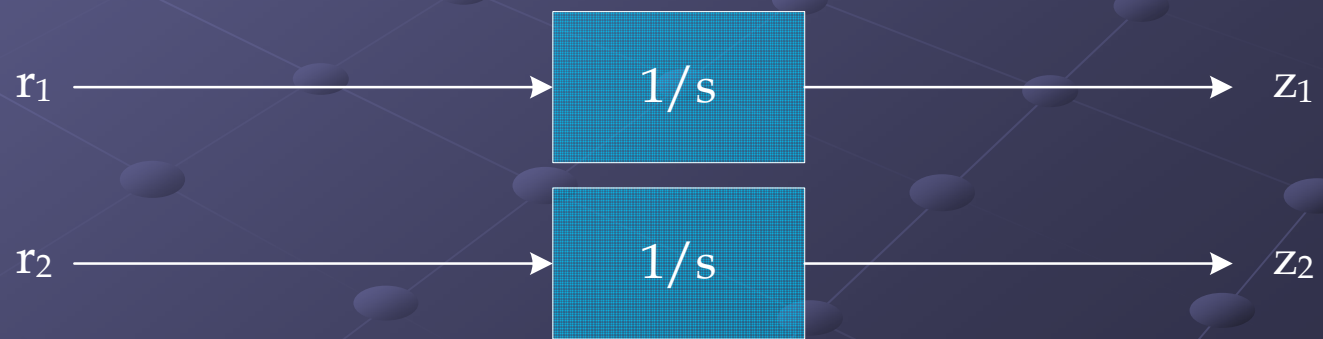
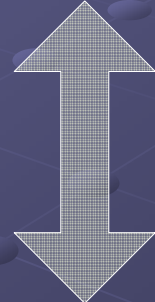
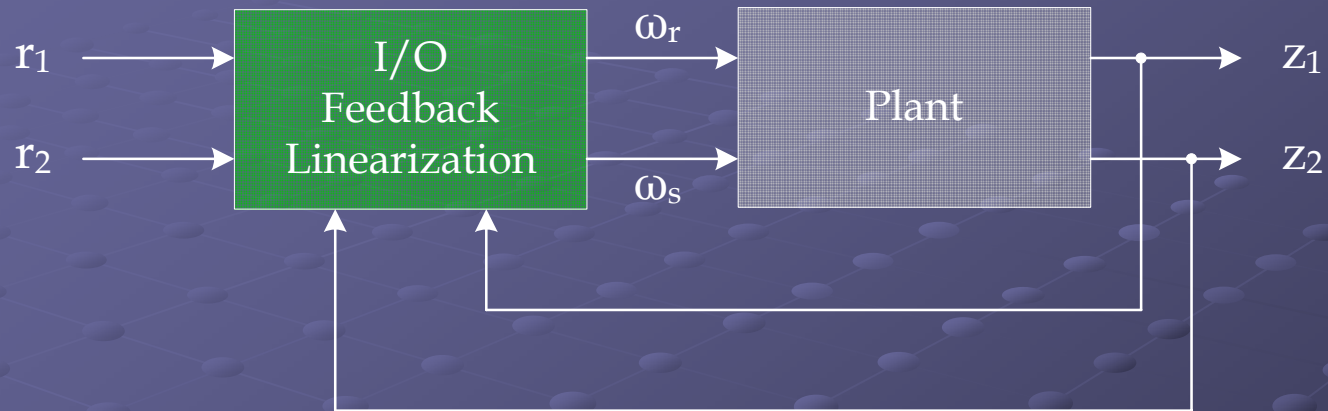
Equazioni del controllore risultante:

$$\omega_r = \frac{1}{\rho} \left(c_\phi c_{\theta\phi} \left(\dot{z}_{d1} + k_{p1}(z_{d1} - z_1) \right) + c_\phi s_{\theta\phi} \left(\dot{z}_{d2} + k_{p2}(z_{d2} - z_2) \right) \right)$$

$$\omega_s = - \left(\frac{c_{\theta\phi} s_\phi}{\ell} + \frac{s_{\theta\phi}}{\delta} \right) \left(\dot{z}_{d1} + k_{p1}(z_{d1} - z_1) \right) - \left(\frac{s_{\theta\phi} s_\phi}{\ell} - \frac{c_{\theta\phi}}{\delta} \right) \left(\dot{z}_{d2} + k_{p2}(z_{d2} - z_2) \right)$$



Static feedback linearization





Indirect adaptive control

I parametri ρ ed l ricevuti dal controllore sono valori stimati a priori

$$v = A^{-1}(\theta, \phi, \rho_c, l_c)r$$

Per ottenere le performance migliori del controllore è necessario:

- eseguire una stima ricorsiva a partire da un valore iniziale
- fornire ad ogni passo, le stime aggiornate al controllore

Stima dei parametri attraverso un'approssimazione delle equazioni dinamiche al fine renderle lineari nei parametri ρ ed l :

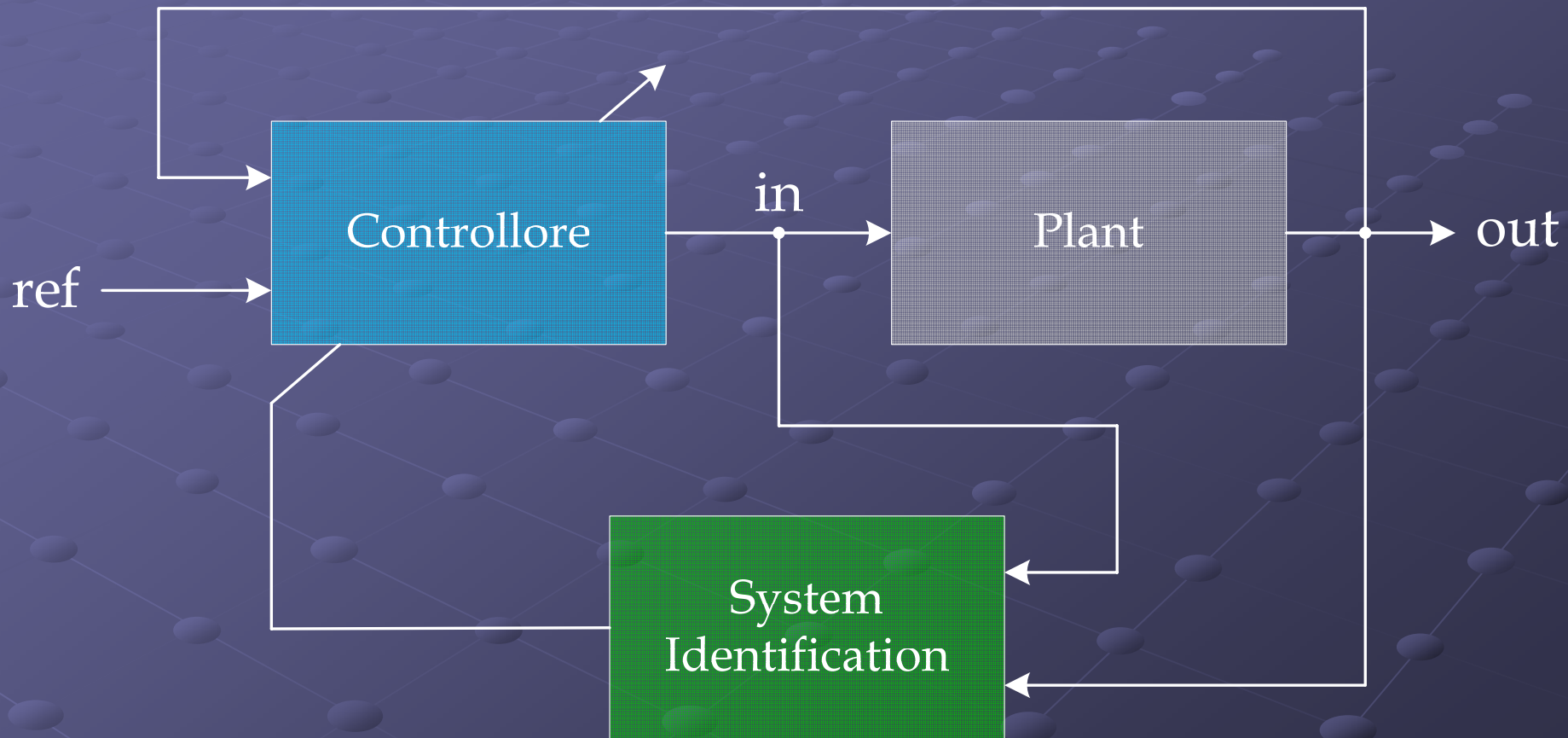
$$\frac{\rho}{l} \approx \frac{1}{l_0} \left(\rho_0 - \frac{\rho_0 l}{l_0} + \rho \right) \quad \beta = \begin{bmatrix} \rho \\ l \end{bmatrix}$$

Stima dei parametri attraverso trasformazione dei parametri:

$$v = \frac{\rho}{l} \quad \beta = \begin{bmatrix} \rho \\ v \end{bmatrix}$$



Indirect adaptive control





Stimatore (RLS)

Caratterizzato da una dipendenza lineare dal vettore dei parametri da stimare

$$\tilde{y} = F(x, \beta) = \Phi(x)\beta$$

Stima del vettore dei parametri in modo da ridurre a zero l'errore

$$e_i = y_i - \tilde{y}_i = y_i - \Phi(x_i)\beta$$

Minimi quadrati ricorsivi

➤ Calcolo della matrice $\Phi(k)$ con i valori stimati di ρ ed l

➤ Calcolo dell'uscita $y(k)$ dipendente dagli ingressi

➤ Calcolo della matrice $\Gamma(k)$ $\Gamma(k) = \left(\Phi_{k+1} P(k) \Phi_{k+1}^T + \lambda A_{k+1}^{-1} \right)^{-1}$

➤ Calcolo della matrice $P(k+1)$ $P(k+1) = \frac{1}{\lambda} \left(P(k) - P(k) \Phi_{k+1}^T \Gamma(k) \Phi_{k+1} P(k) \right)$

➤ Calcolo/stima del vettore dei parametri $\theta(k+1)$

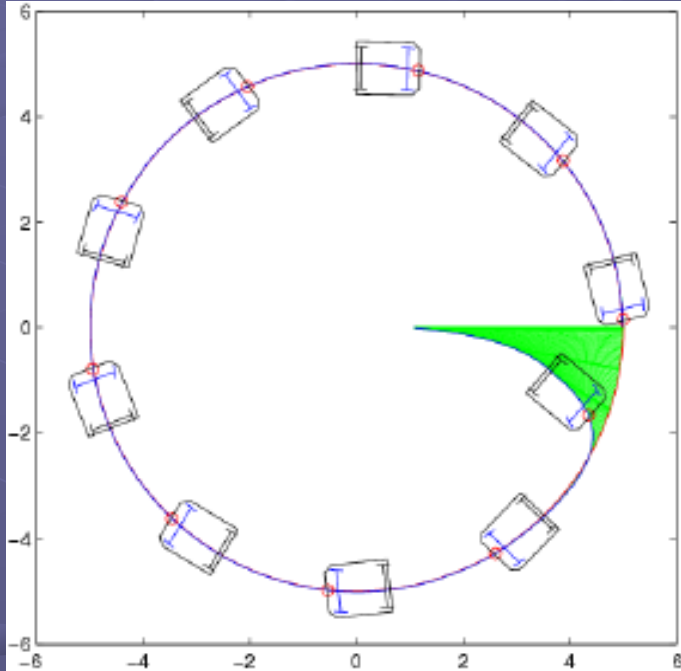
$$\beta(k+1) = \beta(k) + P(k+1) \Phi_{k+1}^T A_{k+1} \left(y_{k+1} - \Phi_{k+1} \beta(k) \right)$$



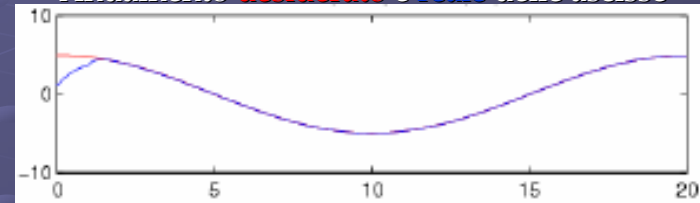
Simulazioni

Traiettoria circolare

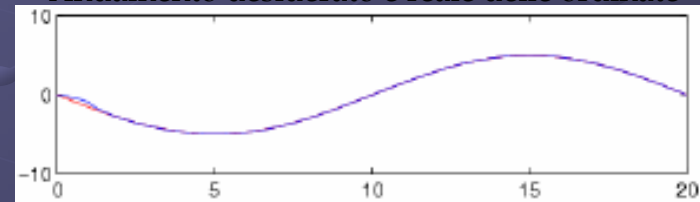
Andamento **desiderato** e **reale** della traiettoria



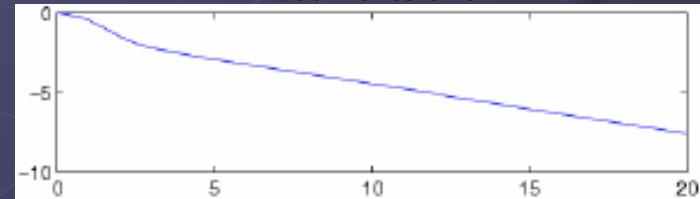
Andamento **desiderato** e **reale** delle ascisse



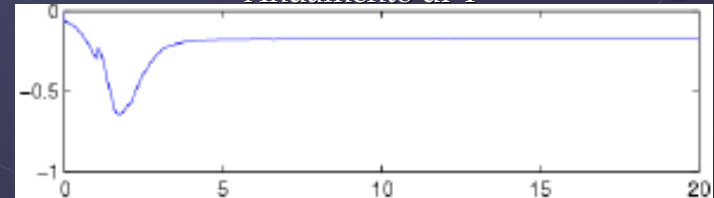
Andamento **desiderato** e **reale** delle ordinate



Andamento di θ



Andamento di Φ



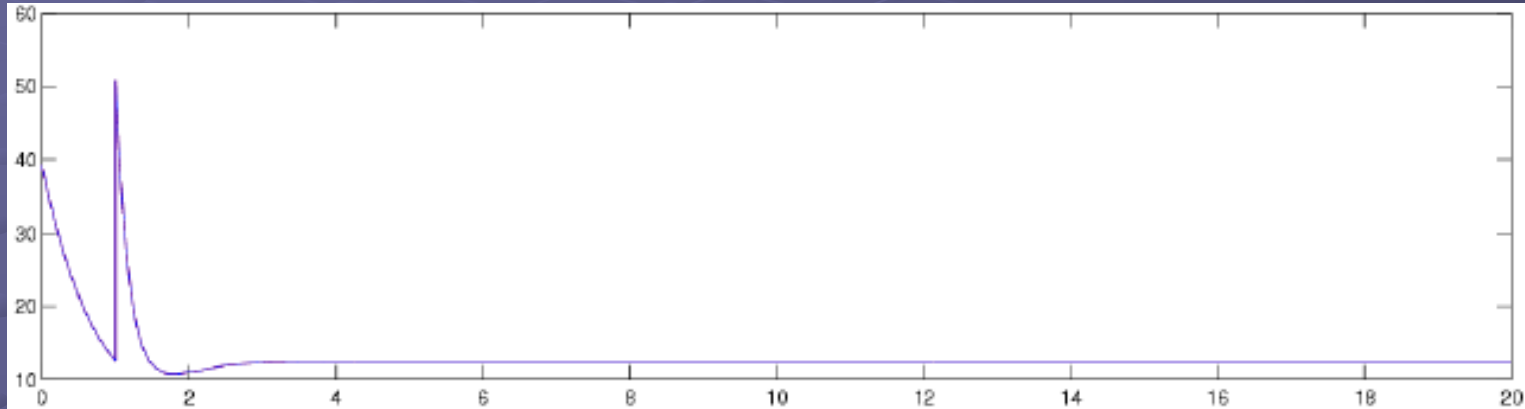
Il robot aggancia velocemente la traiettoria
errore nullo a regime



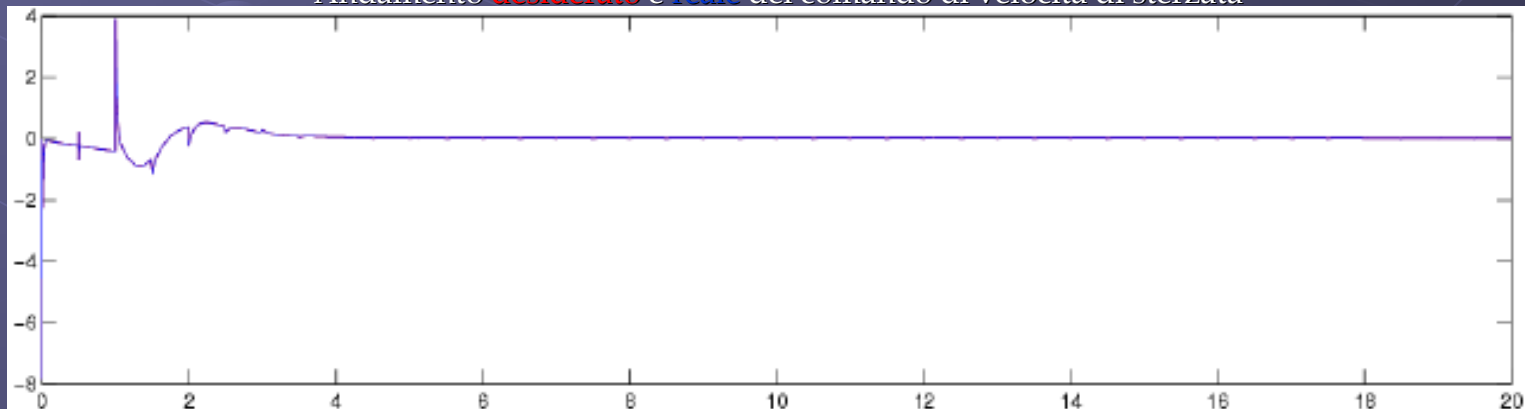
Simulazioni

Traiettoria circolare

Andamento **desiderato** e **reale** del comando di velocità di trazione



Andamento **desiderato** e **reale** del comando di velocità di sterzata



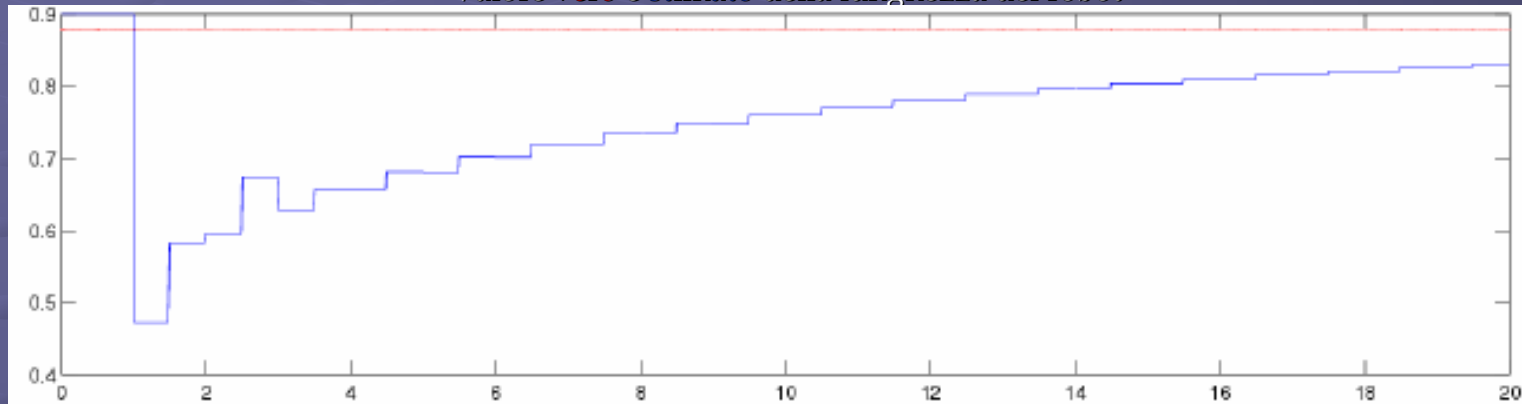
Discontinuità in $t = 1$ sec dove il controllore riceve stime molto diverse da quelle precedenti



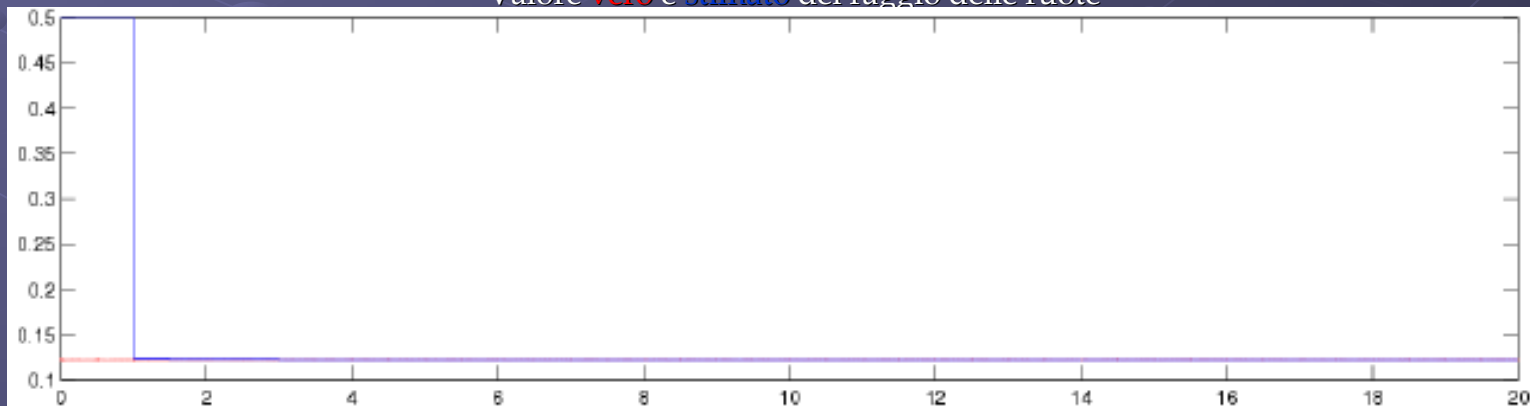
Simulazioni

Traiettoria circolare

Valore **vero** e **stimato** della lunghezza del robot



Valore **vero** e **stimato** del raggio delle ruote



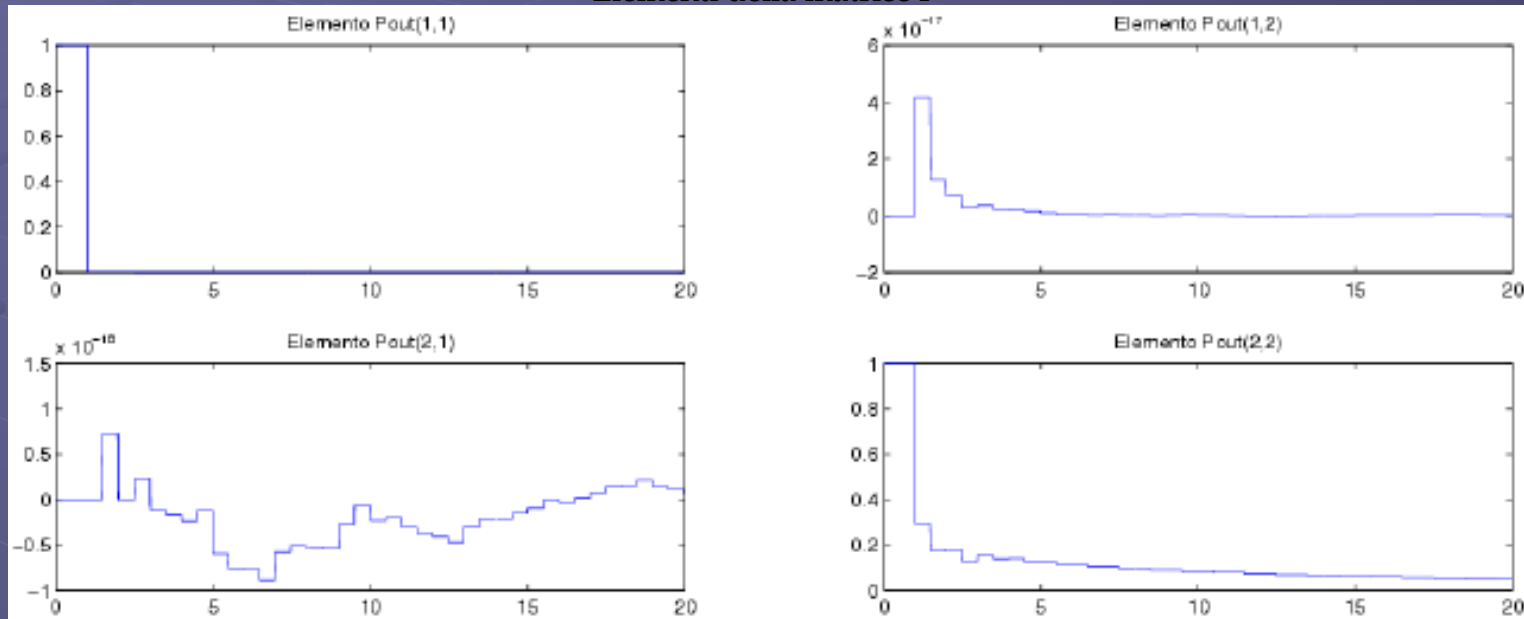
Stima di ℓ più difficile – non converge al valore vero, ma l'errore si annulla



Simulazioni

Traiettoria circolare

Elementi della matrice P



L'elemento p_{11} (stima di ρ) decresce velocemente

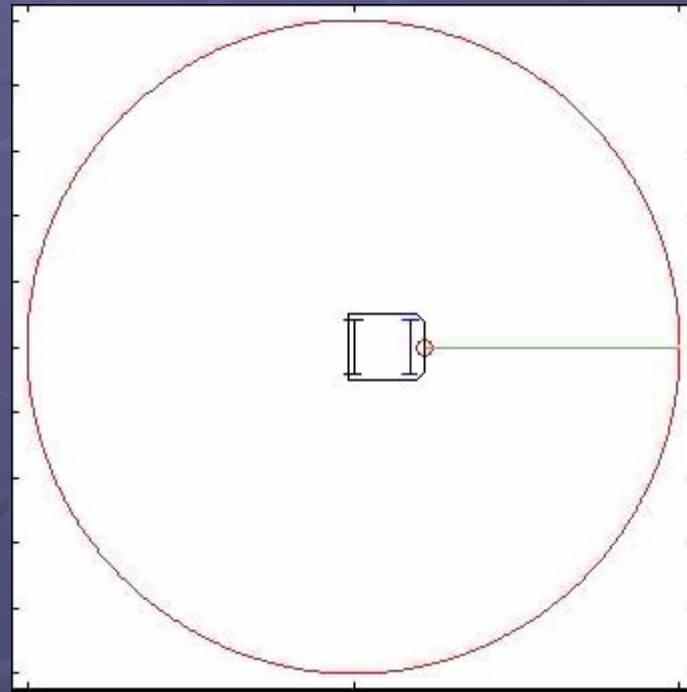
Questo non accade per l'elemento p_{22} (stima di ℓ)!



Simulazioni

Traiettoria circolare

Simulazione 2D

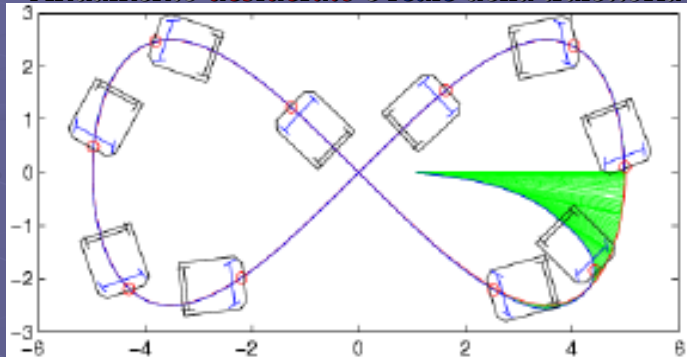




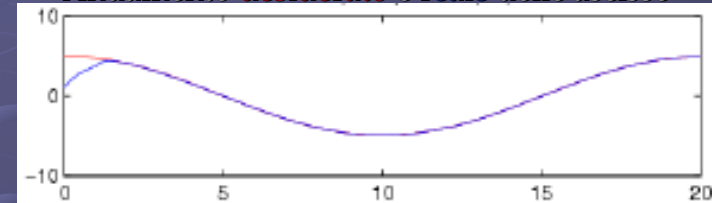
Simulazioni

Traiettoria ad otto

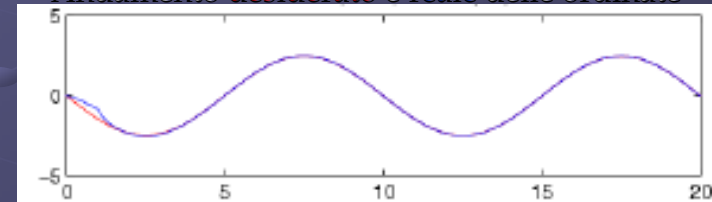
Andamento **desiderato** e **reale** della traiettoria



Andamento **desiderato** e **reale** delle ascisse



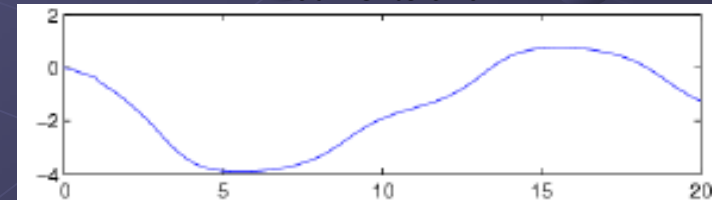
Andamento **desiderato** e **reale** delle ordinate



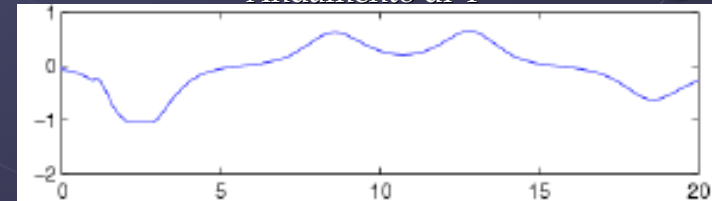
Il robot aggancia la traiettoria

Saturazione dello sterzo

Andamento di θ



Andamento di Φ



Inizialmente è presente un errore non nullo

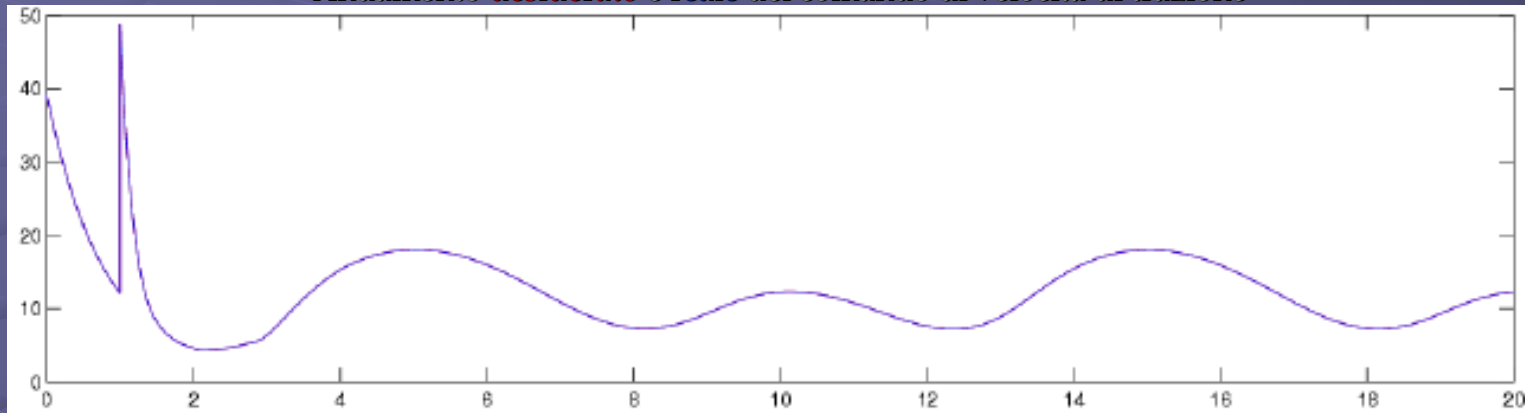
errore nullo a regime



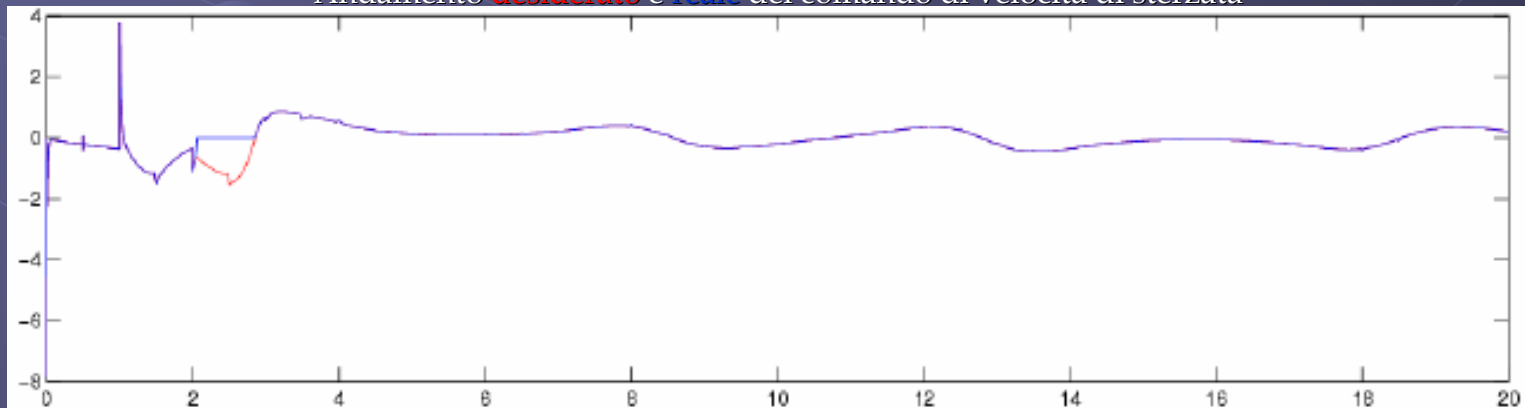
Simulazioni

Traiettoria ad otto

Andamento **desiderato** e **reale** del comando di velocità di trazione



Andamento **desiderato** e **reale** del comando di velocità di sterzata



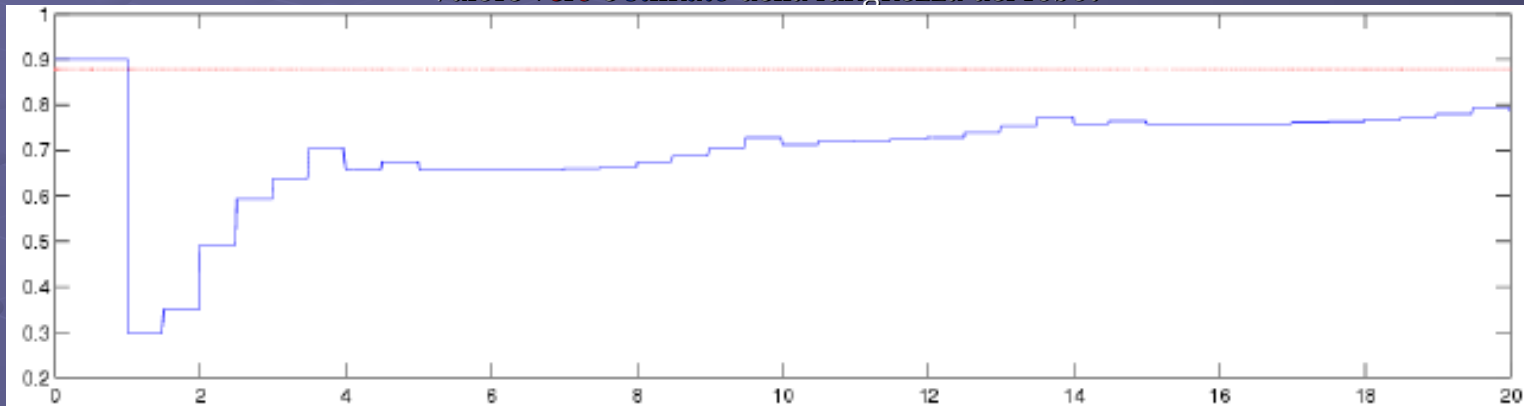
Leggero scostamento dell'angolo di sterzo dall'andamento desiderato (saturazione)



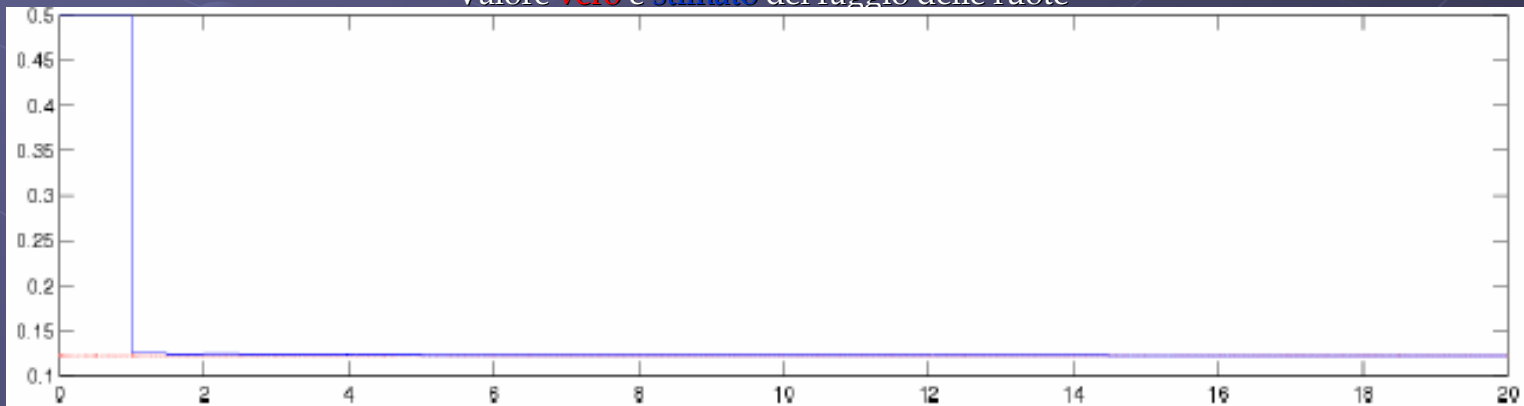
Simulazioni

Traiettoria ad otto

Valore **vero** e **stimato** della lunghezza del robot



Valore **vero** e **stimato** del raggio delle ruote



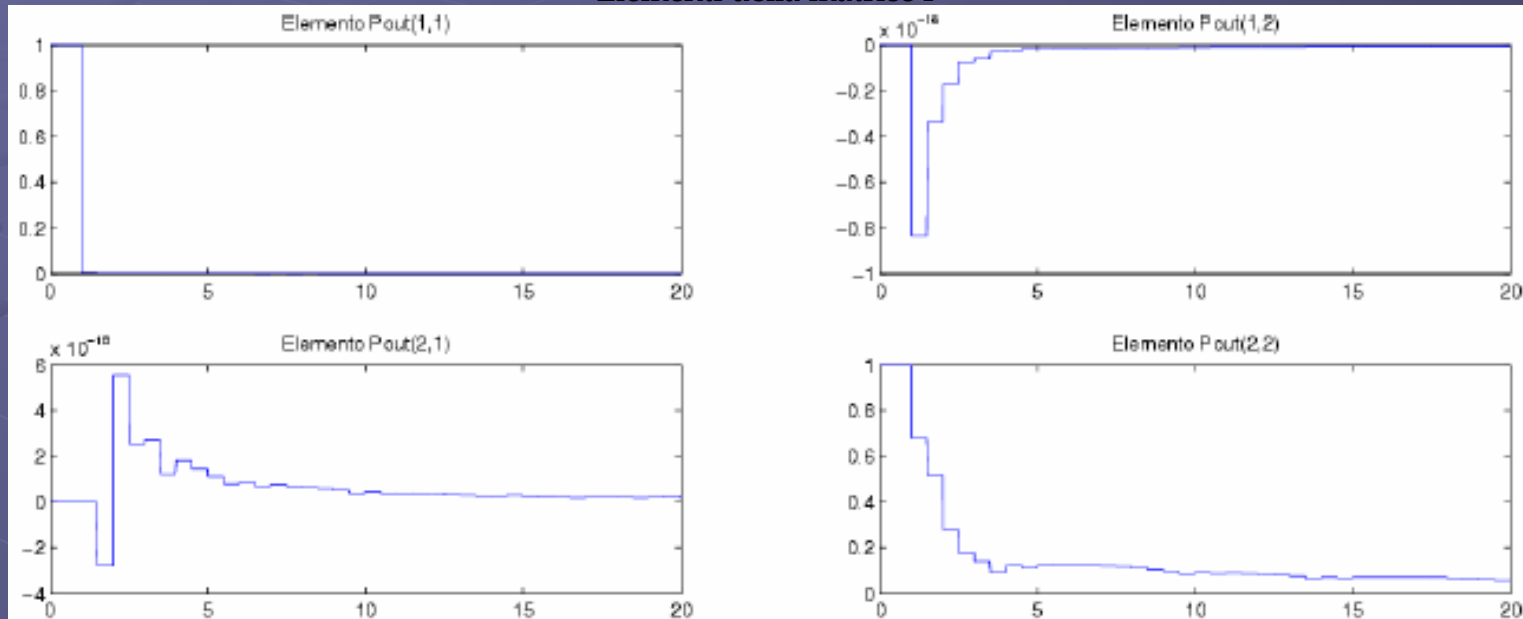
Stima di ℓ più efficace rispetto al caso precedente - l'errore si annulla a regime



Simulazioni

Traiettoria ad otto

Elementi della matrice P



L'elemento p_{11} (stima di ρ) decresce velocemente

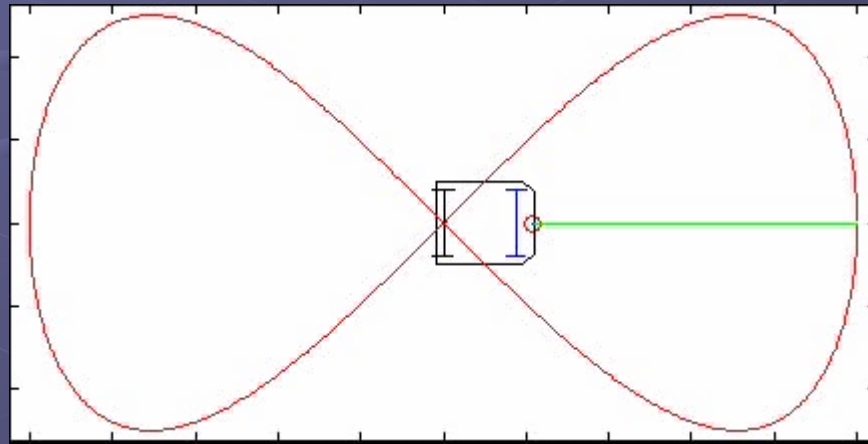
L'elemento p_{22} (stima di ℓ) decresce più velocemente rispetto al caso precedente



Simulazioni

Traiettoria ad otto

Simulazione 2D

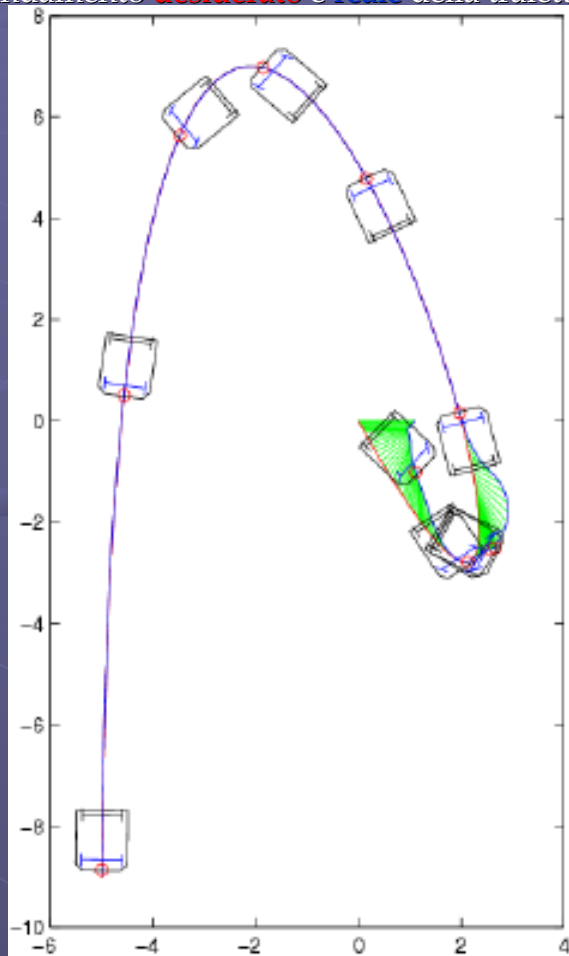




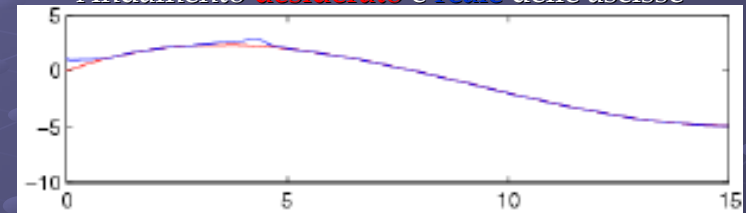
Simulazioni

Traiettoria a curvatura variabile

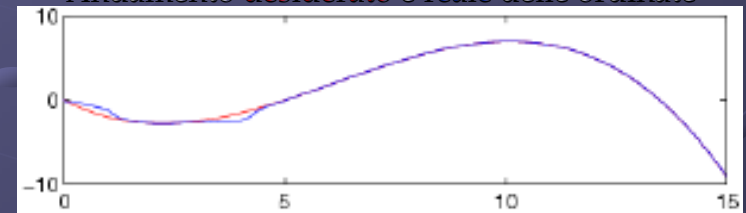
Andamento **desiderato** e **reale** della traiettoria



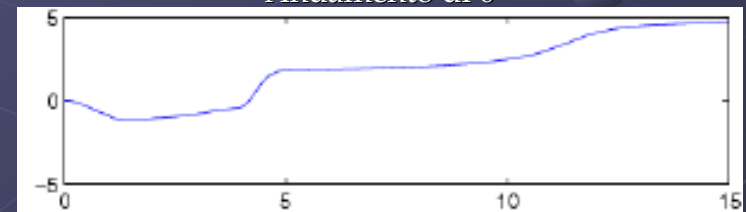
Andamento **desiderato** e **reale** delle ascisse



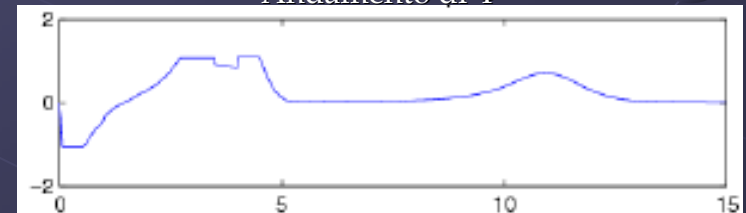
Andamento **desiderato** e **reale** delle ordinate



Andamento di θ



Andamento di Φ



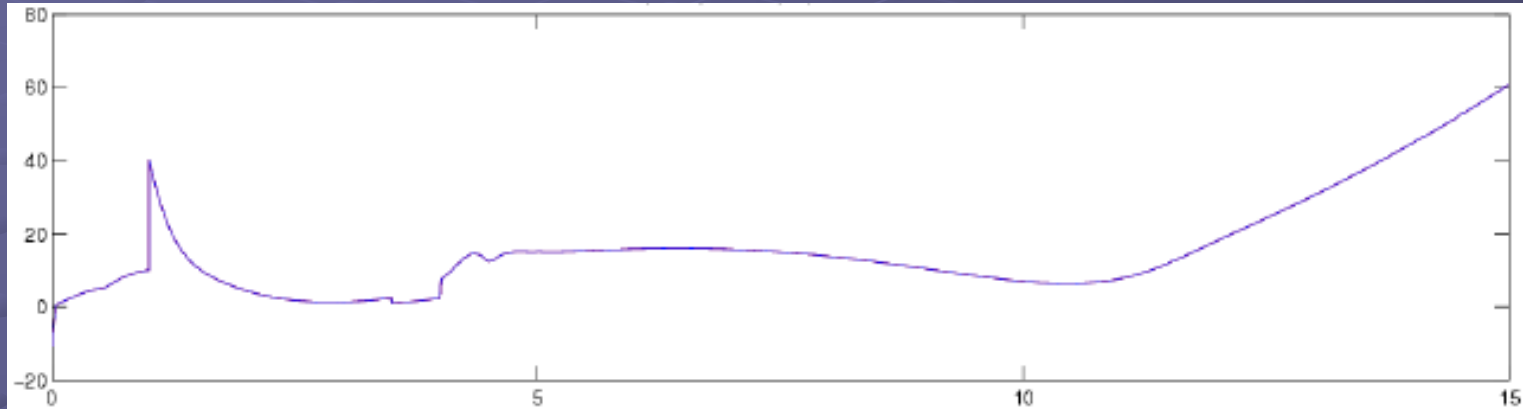
Il robot aggancia la traiettoria



Simulazioni

Traiettoria a curvatura variabile

Andamento **desiderato** e **reale** del comando di velocità di trazione



Andamento **desiderato** e **reale** del comando di velocità di sterzata



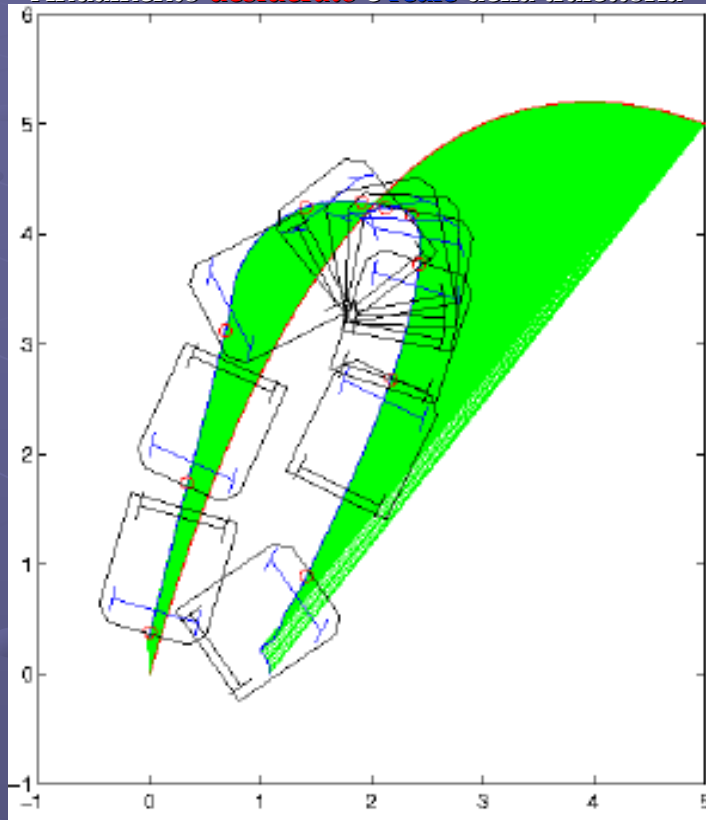
Leggero scostamento dell'angolo di sterzo dall'andamento desiderato (saturazione)



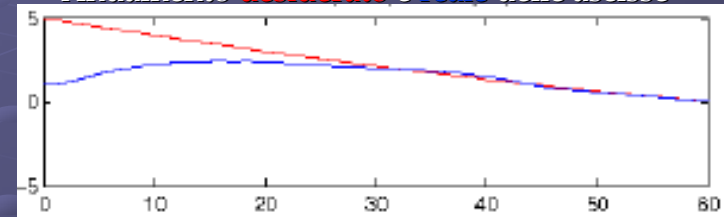
Simulazioni

Traiettoria curva da (5, 5) a (0, 0)

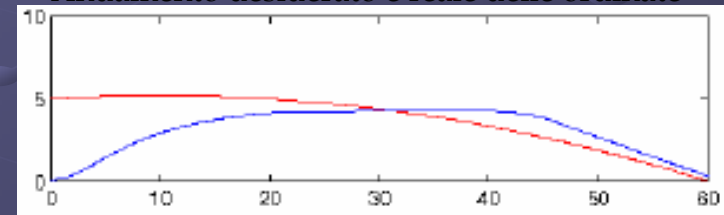
Andamento **desiderato** e **reale** della traiettoria



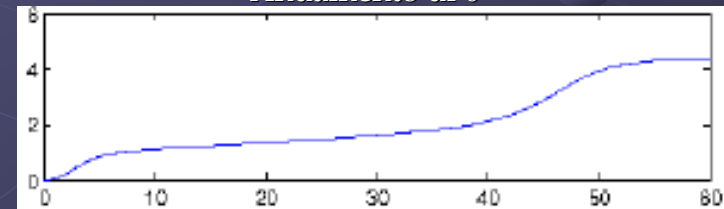
Andamento **desiderato** e **reale** delle ascisse



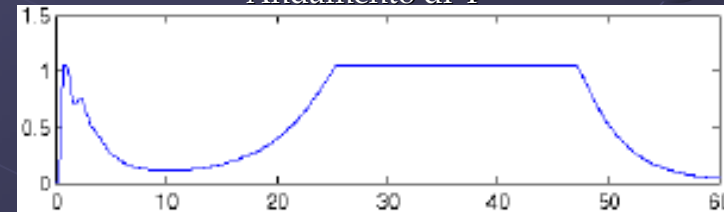
Andamento **desiderato** e **reale** delle ordinate



Andamento di θ



Andamento di Φ



Sterzo in saturazione

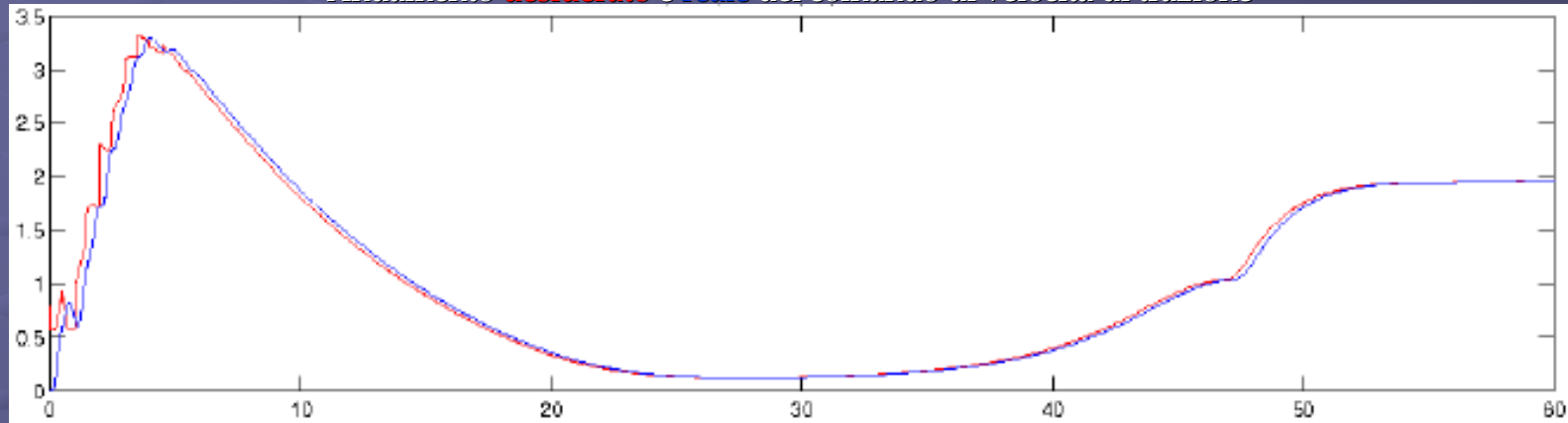
Il robot aggancia ugualmente la traiettoria



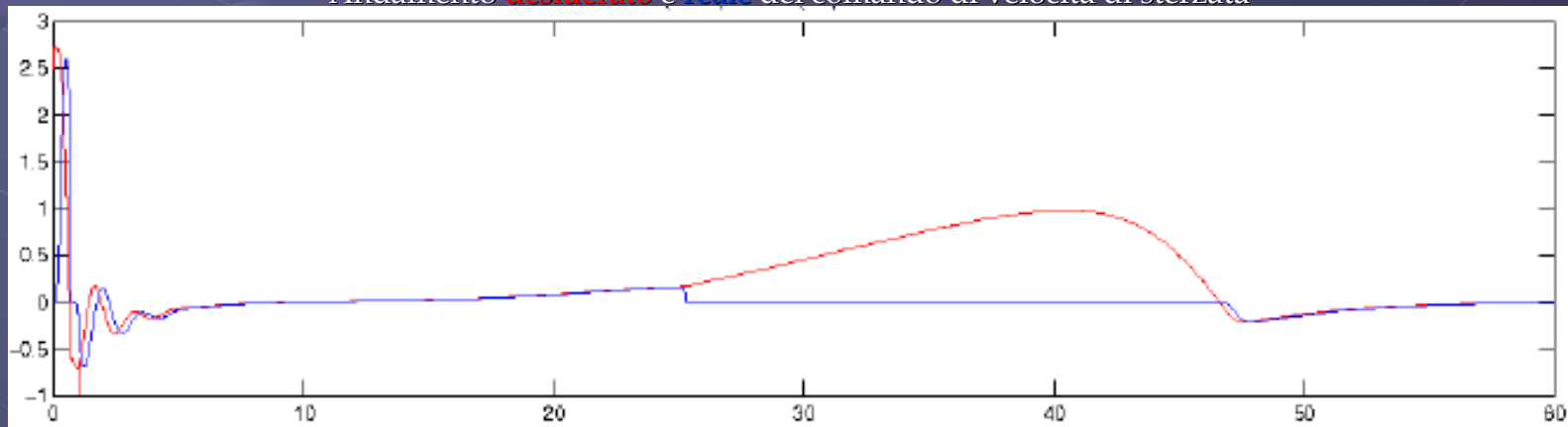
Simulazioni

Traiettoria curva da (5, 5) a (0, 0)

Andamento **desiderato** e **reale** del comando di velocità di trazione



Andamento **desiderato** e **reale** del comando di velocità di sterzata



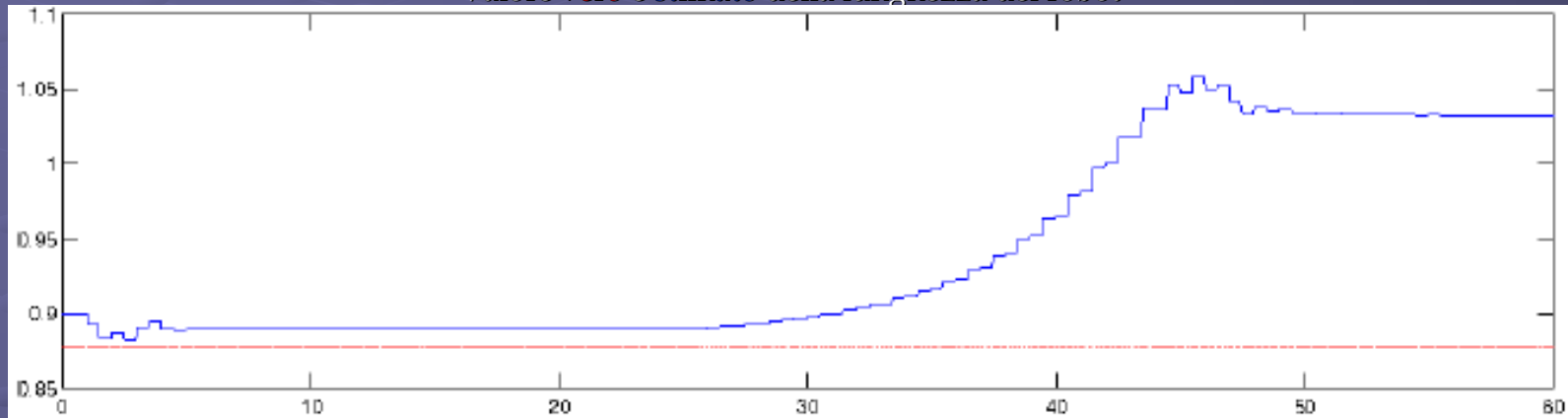
L'andamento reale e quello desiderato coincidono quando Φ ritorna nel range ammissibile



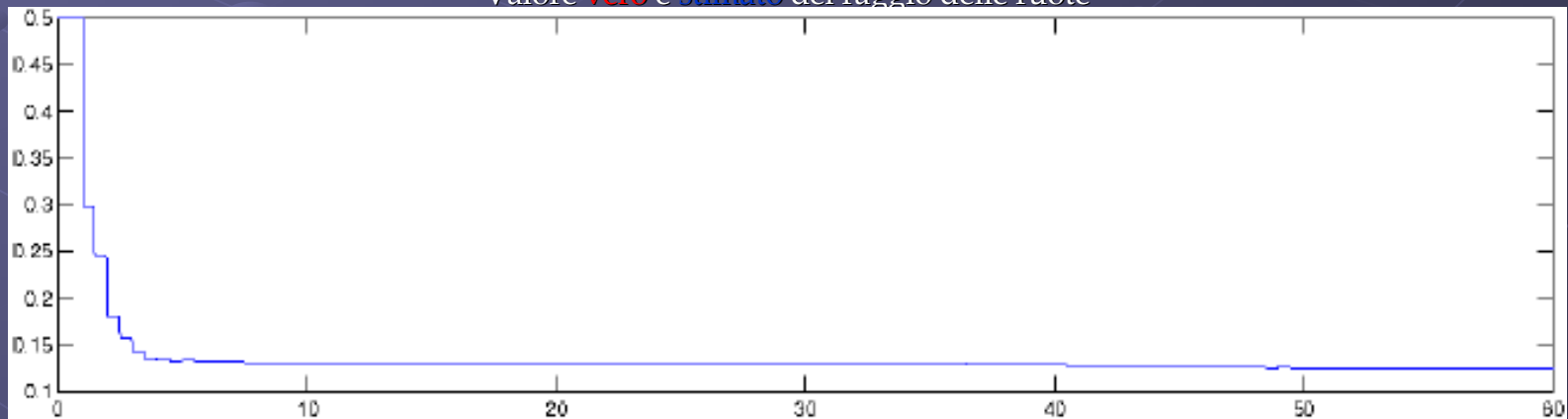
Simulazioni

Traiettoria curva da (5, 5) a (0, 0)

Valore **vero** e **stimato** della lunghezza del robot



Valore **vero** e **stimato** del raggio delle ruote



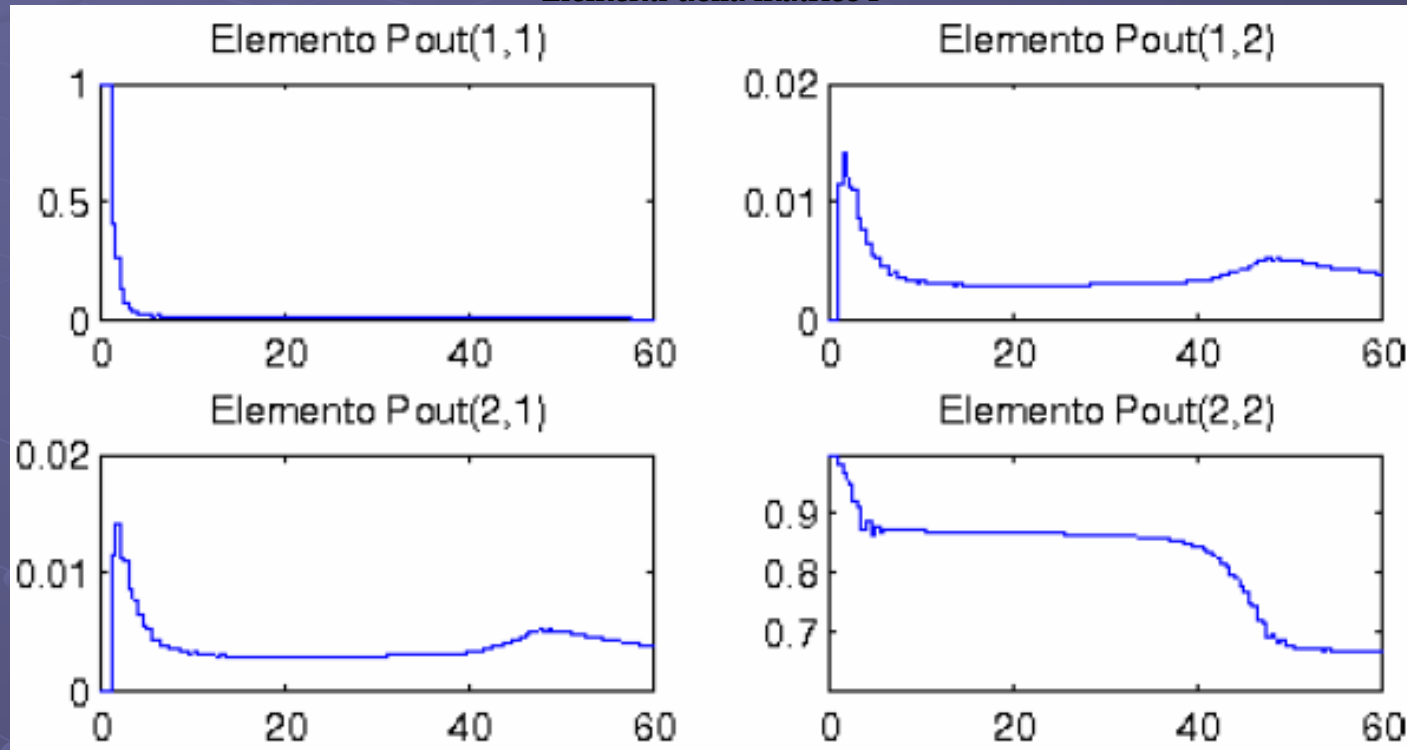
Stima di ℓ più difficile a causa degli effetti degli attuatori non modellati



Simulazioni

Traiettoria curva da (5, 5) a (0, 0)

Elementi della matrice P



L'elemento p_{11} (stima di ρ) decresce velocemente

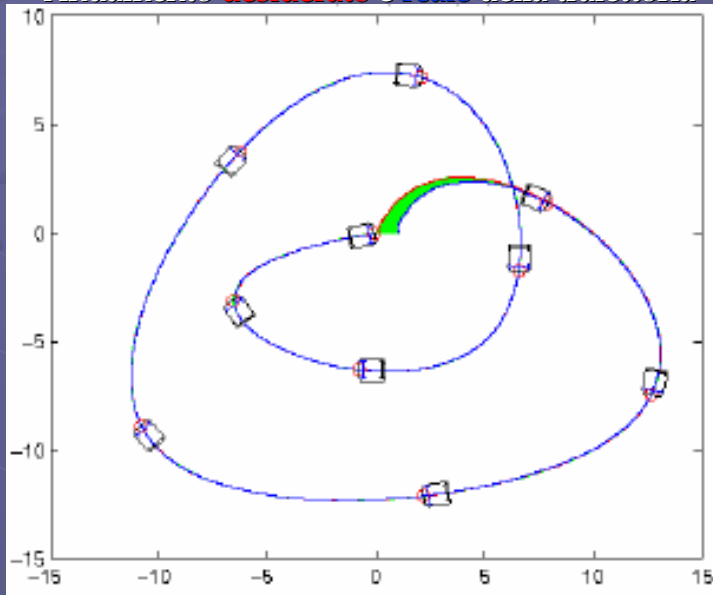
Questo non accade per l'elemento p_{22} (stima di ℓ)!



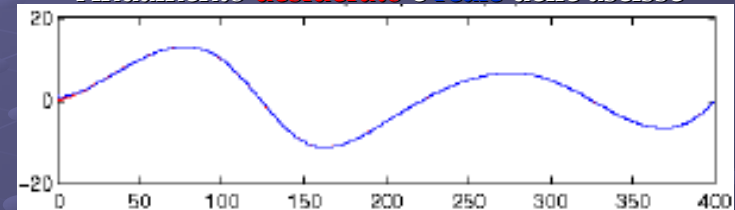
Simulazioni

Traiettoria lenta

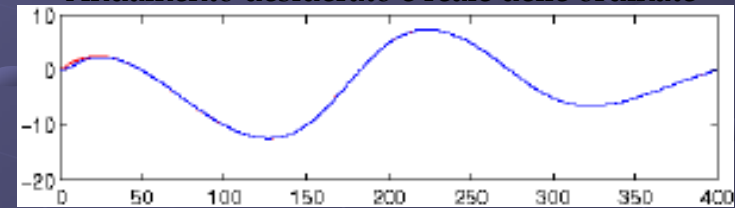
Andamento **desiderato** e **reale** della traiettoria



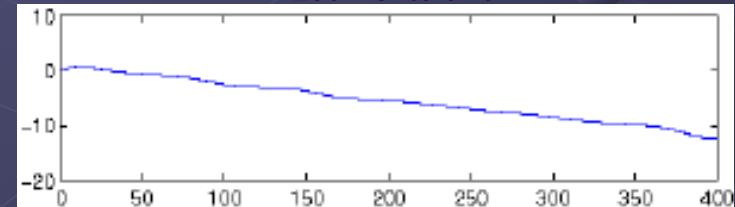
Andamento **desiderato** e **reale** delle ascisse



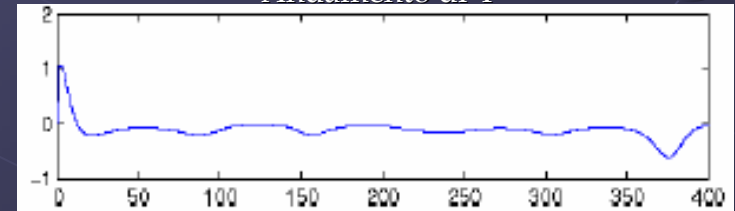
Andamento **desiderato** e **reale** delle ordinate



Andamento di θ



Andamento di Φ



La traiettoria viene eseguita senza problemi

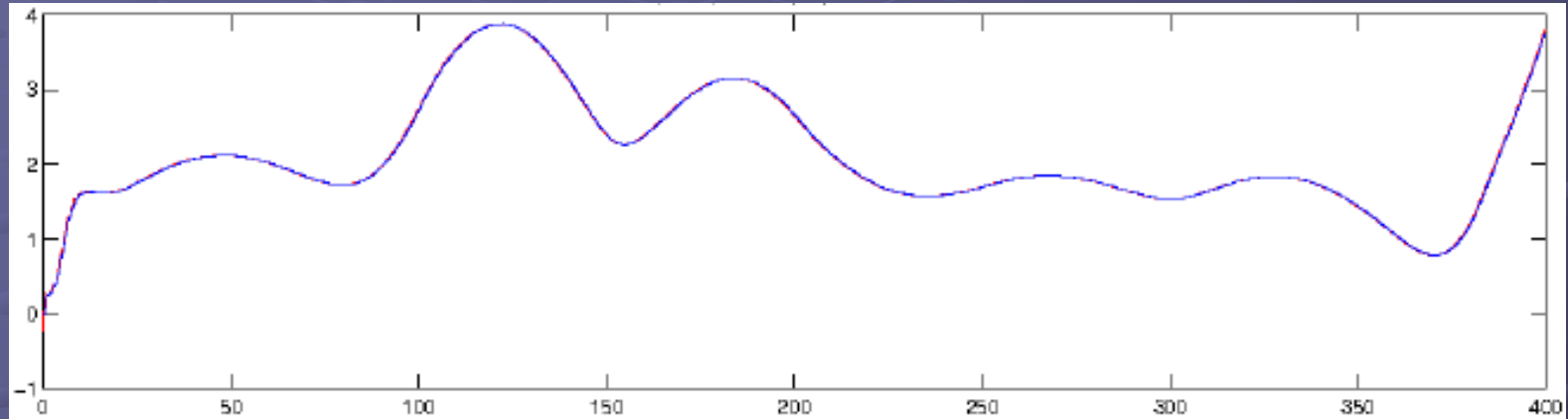
L'errore iniziale viene annullato



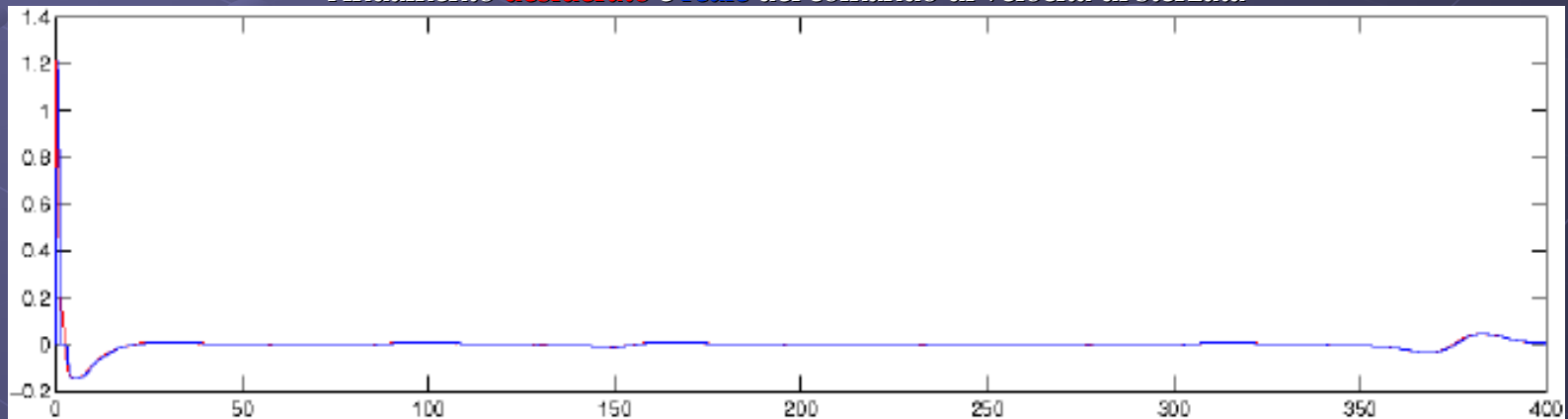
Simulazioni

Traiettoria lenta

Andamento **desiderato** e **reale** del comando di velocità di trazione



Andamento **desiderato** e **reale** del comando di velocità di sterzata



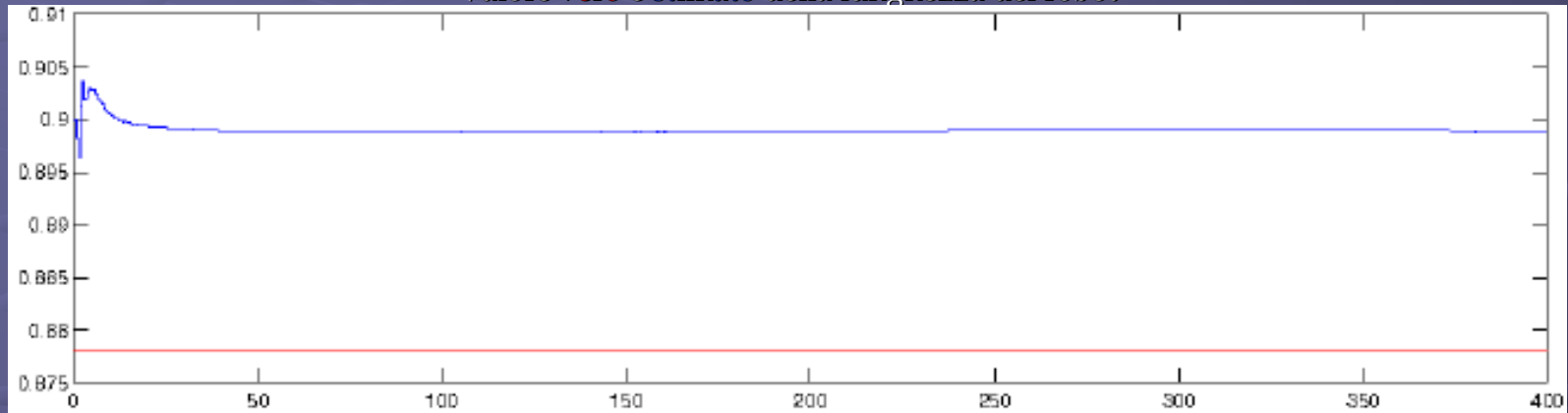
L'effetto degli attuatori è ininfluenza (a parte nell'istante iniziale)



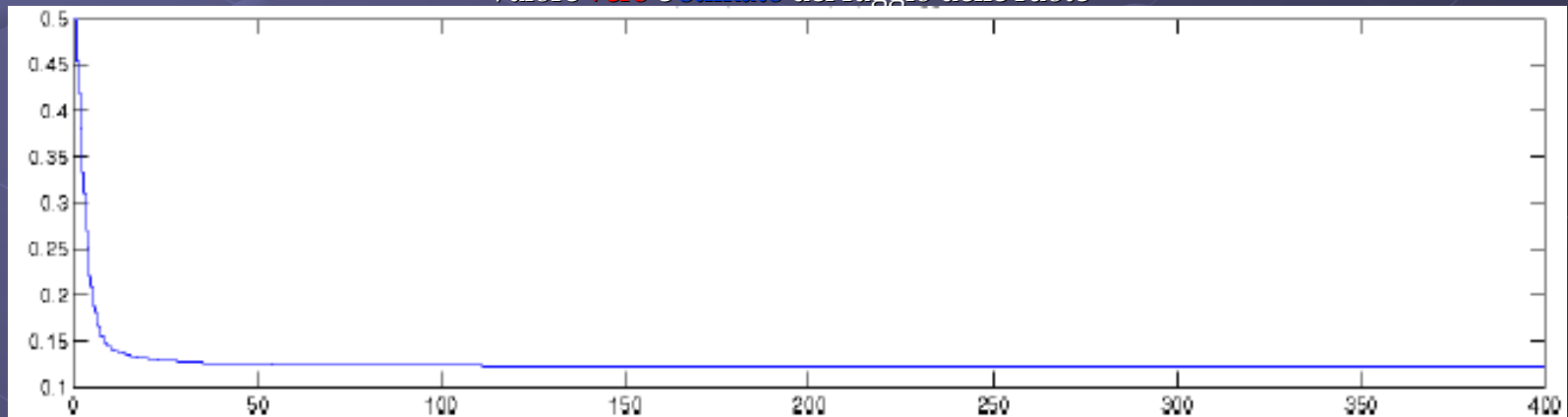
Simulazioni

Traiettoria lenta

Valore **vero** e **stimato** della lunghezza del robot



Valore **vero** e **stimato** del raggio delle ruote



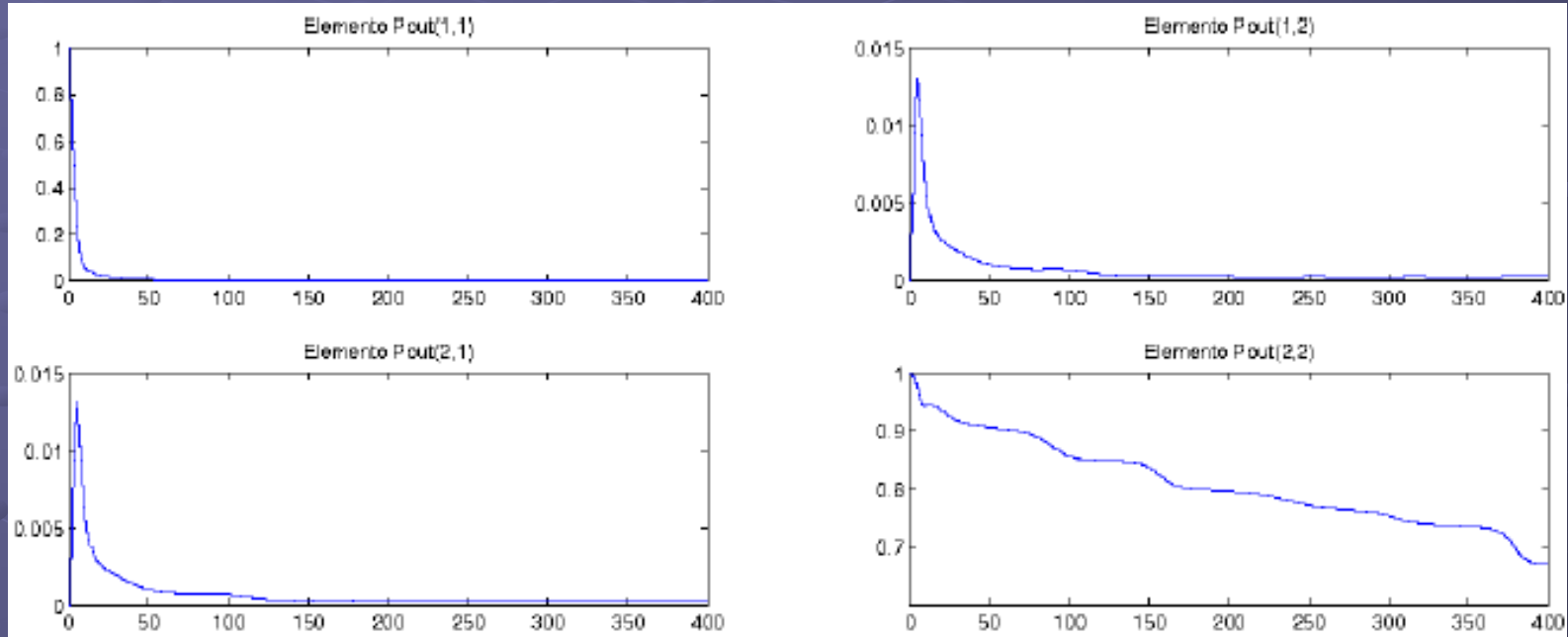
Stima di ℓ più difficile a causa degli effetti degli attuatori non modellati – dipende anche da ℓ_0



Simulazioni

Traiettoria lenta

Elementi della matrice P



L'elemento p_{11} (stima di ρ) decresce velocemente

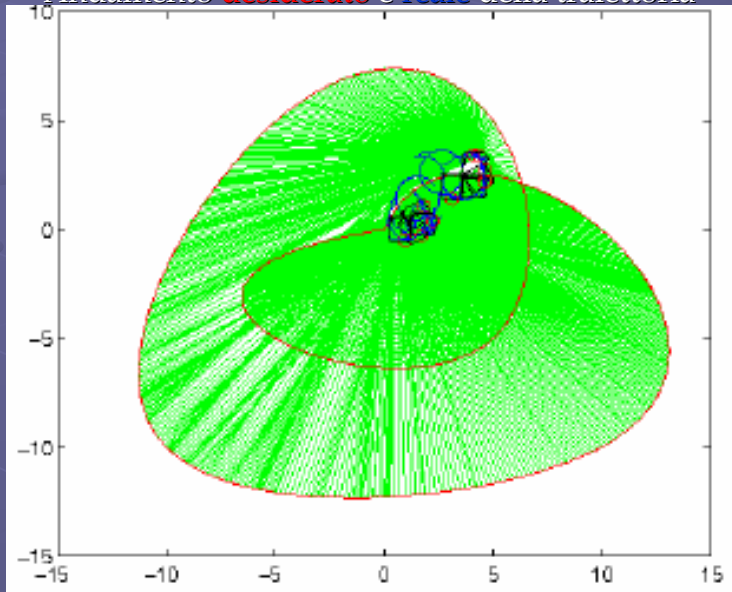
Questo non accade per l'elemento p_{22} (stima di ℓ)!



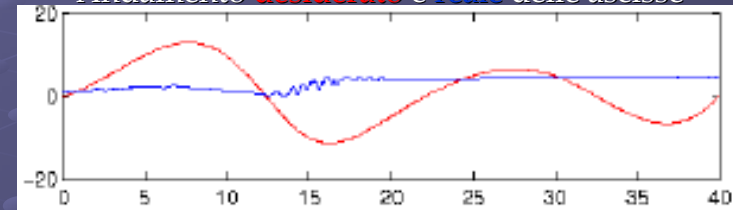
Simulazioni

Traiettoria veloce

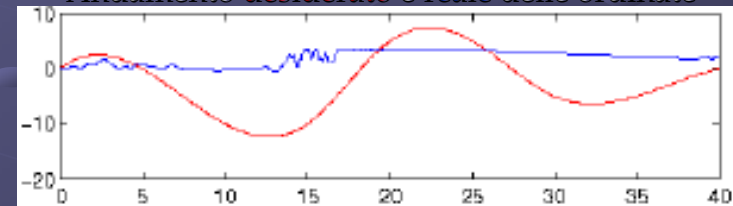
Andamento **desiderato** e **reale** della traiettoria



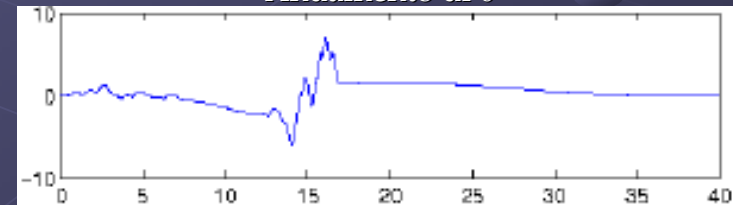
Andamento **desiderato** e **reale** delle ascisse



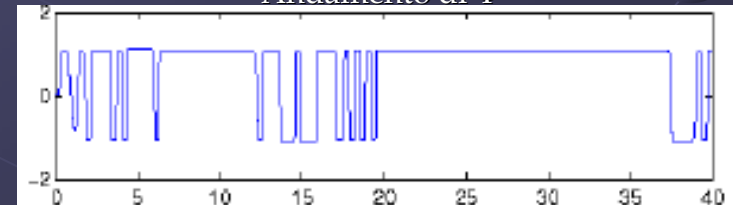
Andamento **desiderato** e **reale** delle ordinate



Andamento di θ



Andamento di Φ



La traiettoria non viene eseguita

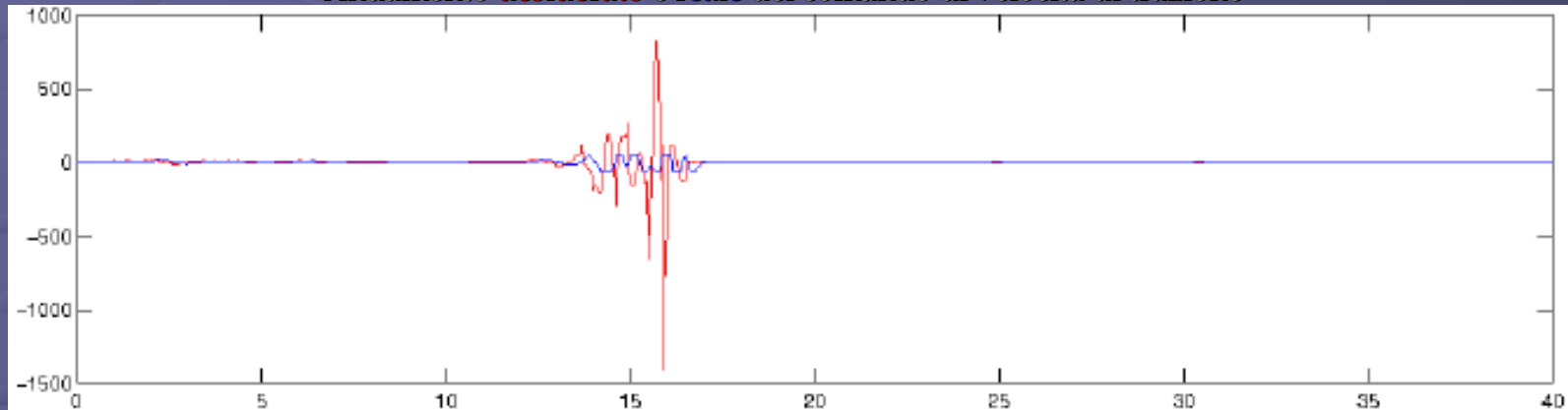
Presenza di instabilità!



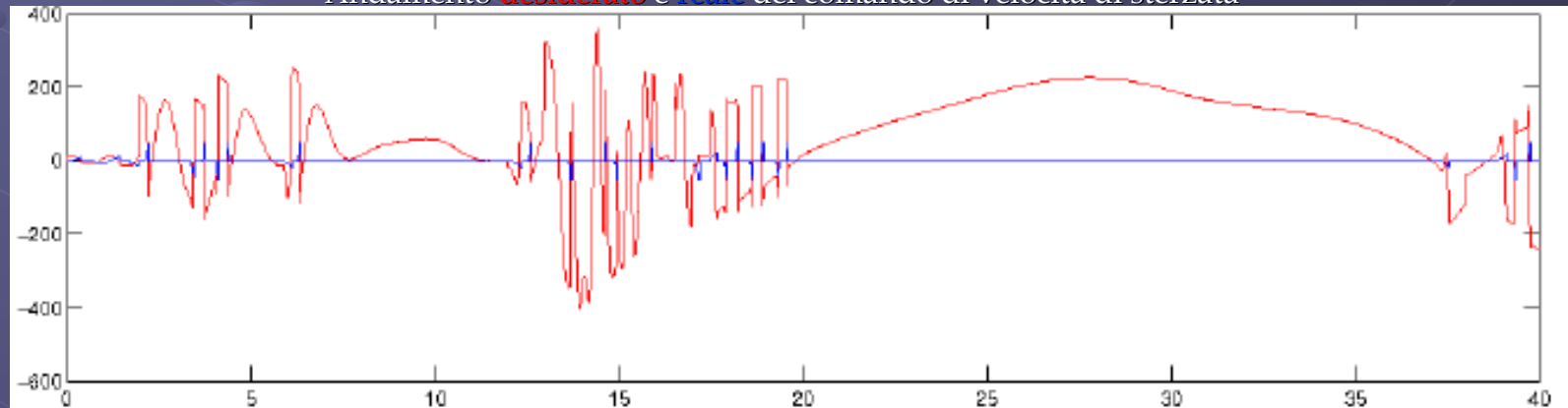
Simulazioni

Traiettoria veloce

Andamento **desiderato** e **reale** del comando di velocità di trazione



Andamento **desiderato** e **reale** del comando di velocità di sterzata



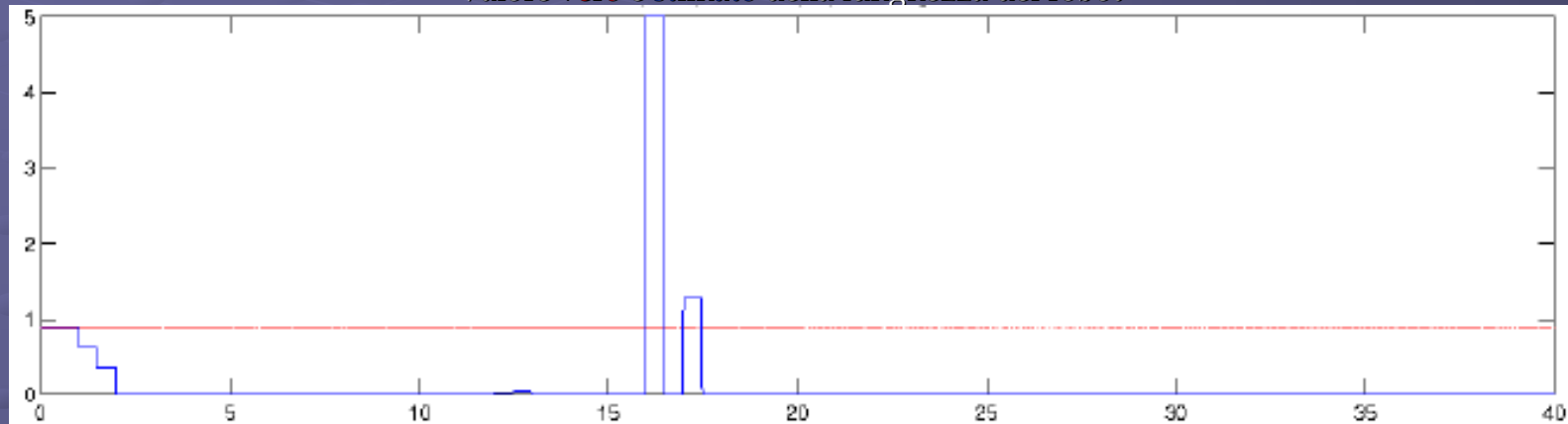
La velocità angolare dello sterzo viene continuamente annullata a causa del limite su Φ



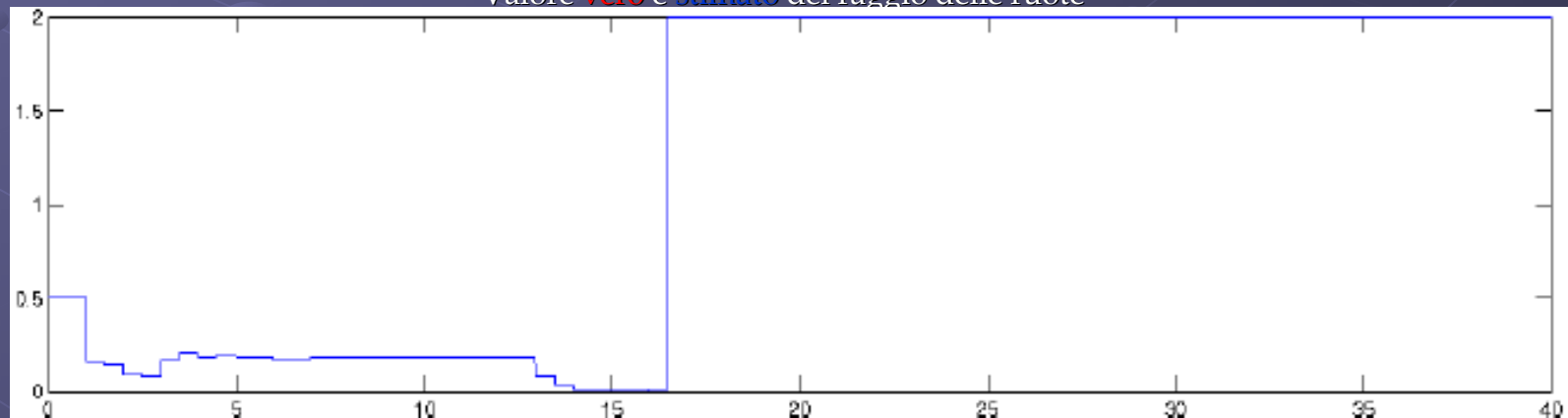
Simulazioni

Traiettoria veloce

Valore **vero** e **stimato** della lunghezza del robot



Valore **vero** e **stimato** del raggio delle ruote



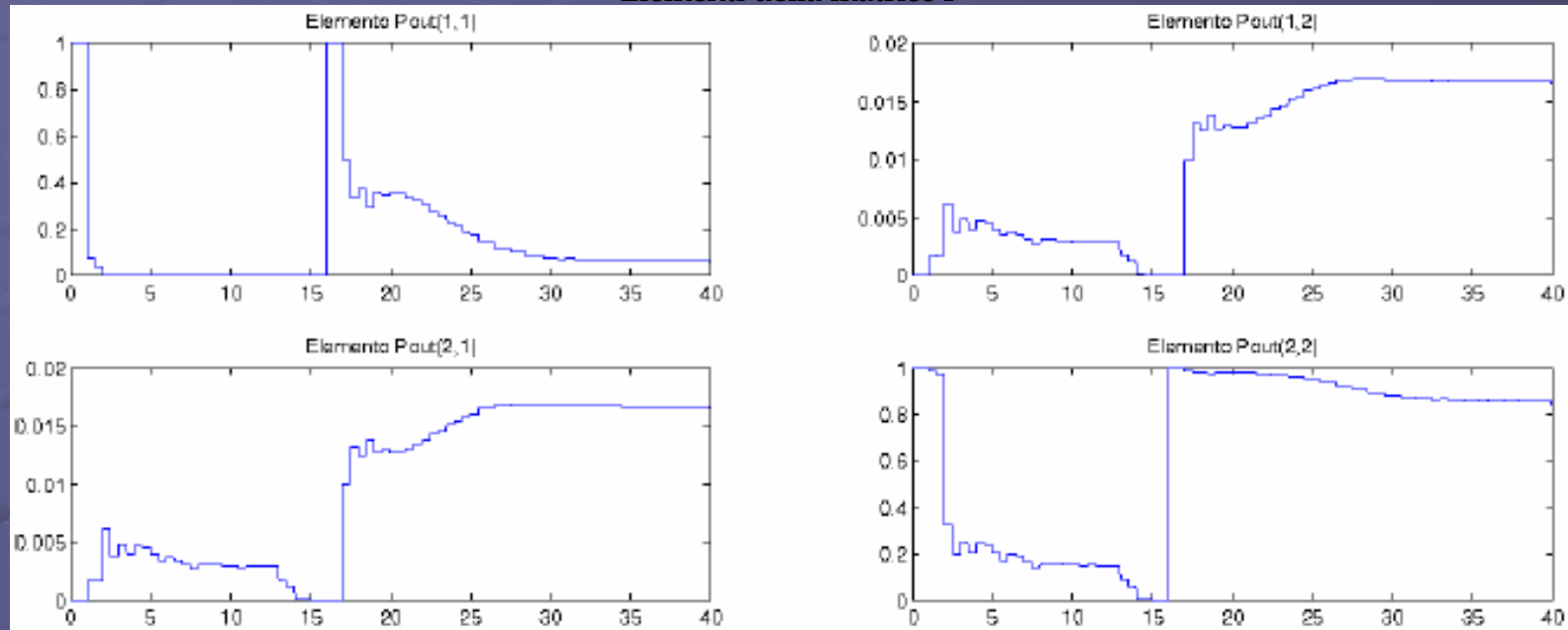
Stima di ℓ e ρ errata - valore limitato grazie alla proiezione



Simulazioni

Traiettoria veloce

Elementi della matrice P



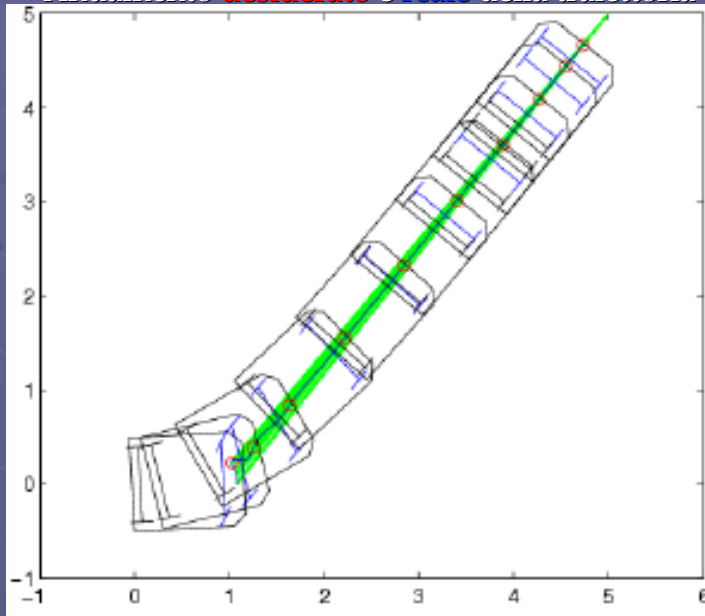
La matrice P viene "resettata" alla matrice identità ogniqualvolta la sua norma scende sotto una soglia prefissata (10^{-4})



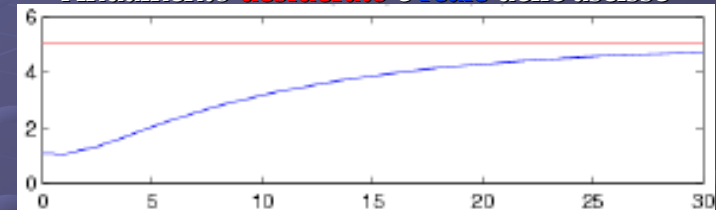
Simulazioni

Posizionamento tramite tracking adattativo

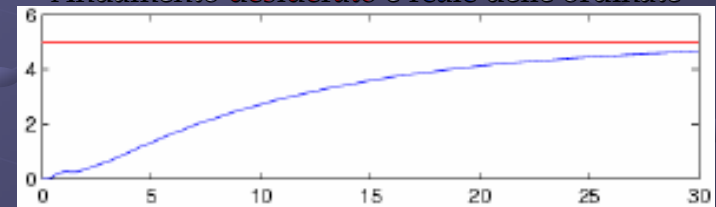
Andamento **desiderato** e **reale** della traiettoria



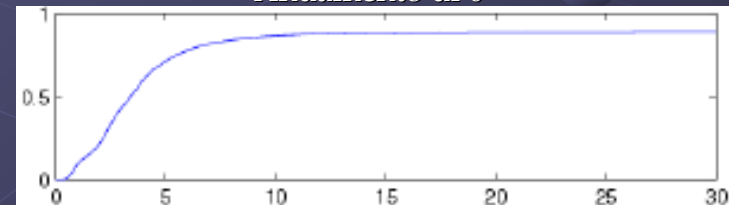
Andamento **desiderato** e **reale** delle ascisse



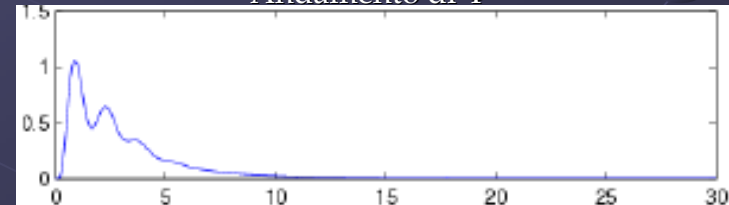
Andamento **desiderato** e **reale** delle ordinate



Andamento di θ



Andamento di Φ



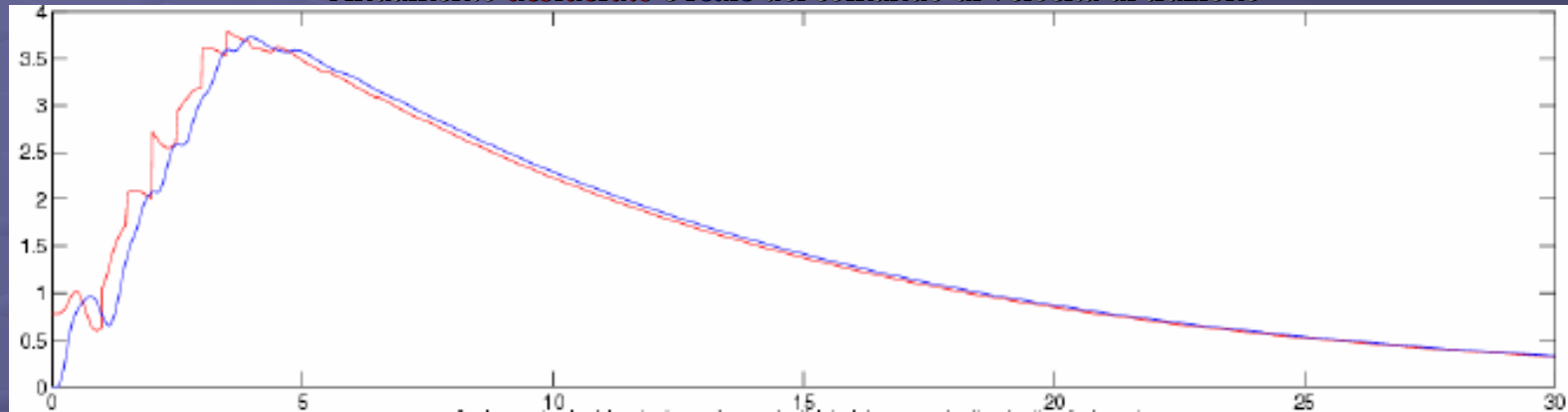
La traiettoria viene eseguita senza problemi
errore nullo senza instabilità



Simulazioni

Posizionamento tramite tracking adattativo

Andamento **desiderato** e **reale** del comando di velocità di trazione



Andamento **desiderato** e **reale** del comando di velocità di sterzata



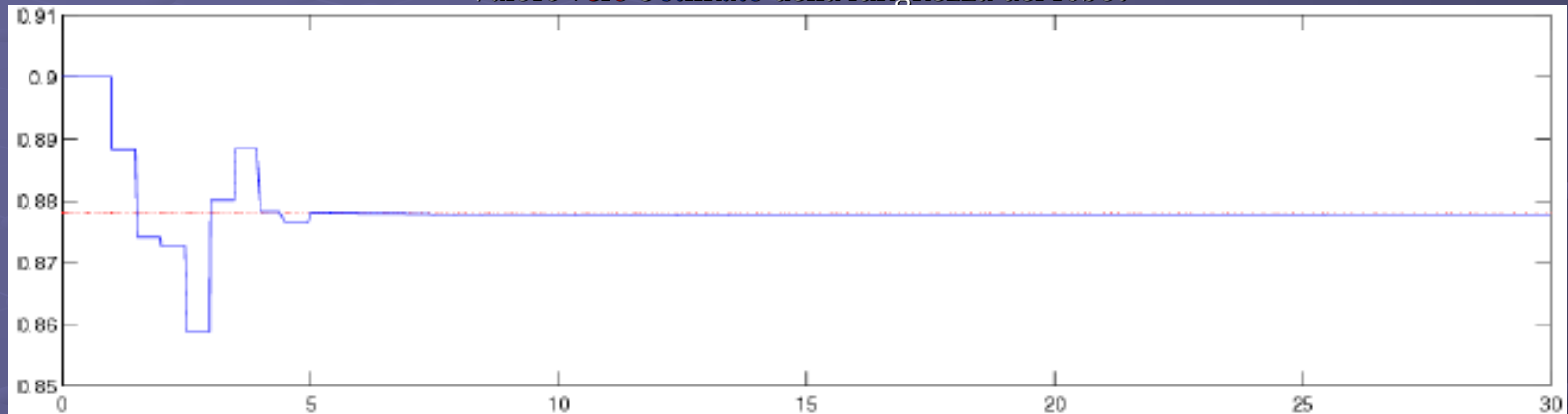
Le velocità di comando vengono impartite senza grossi scostamenti dal comportamento desiderato



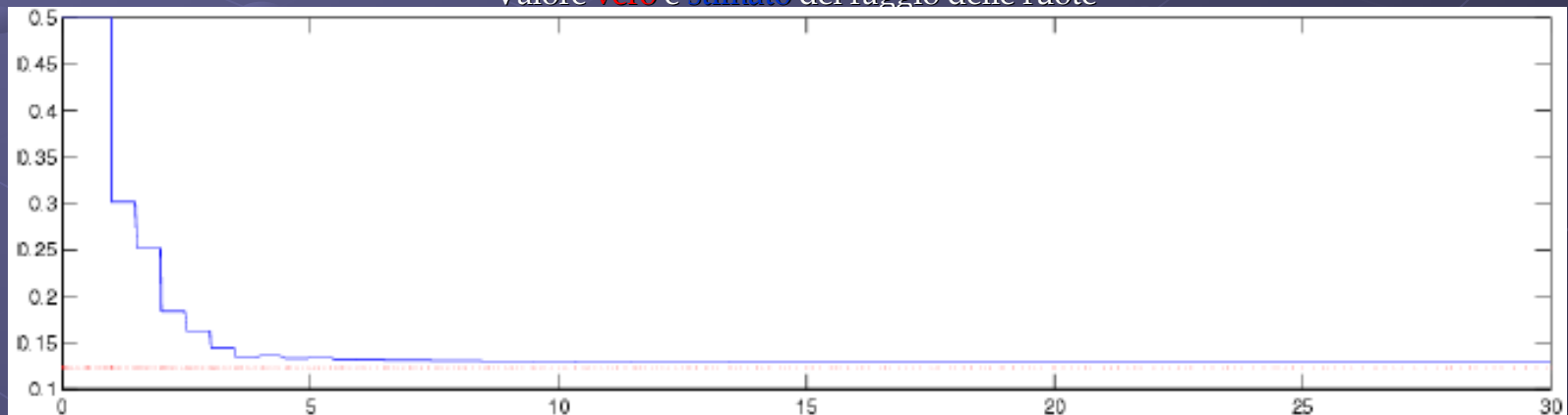
Simulazioni

Posizionamento tramite tracking adattativo

Valore **vero** e **stimato** della lunghezza del robot



Valore **vero** e **stimato** del raggio delle ruote



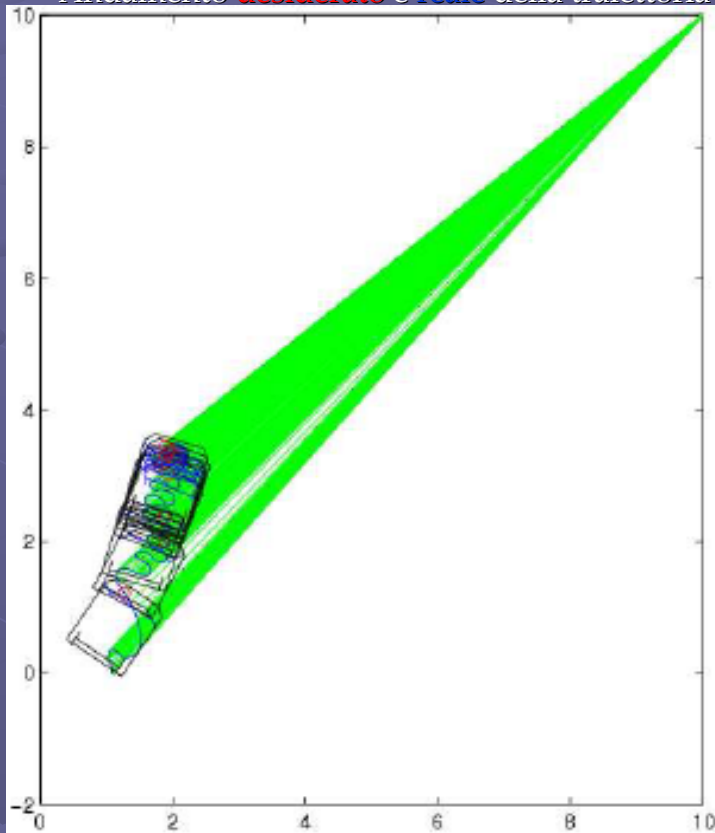
Stima di ℓ e ρ accettabile



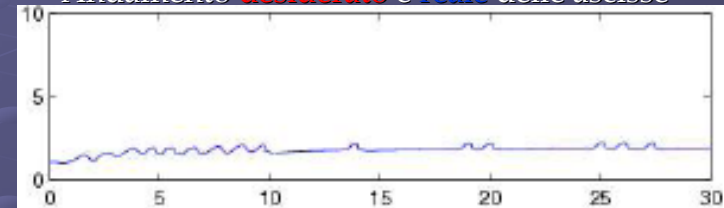
Simulazioni

Posizionamento tramite tracking adattativo con scaling temporale

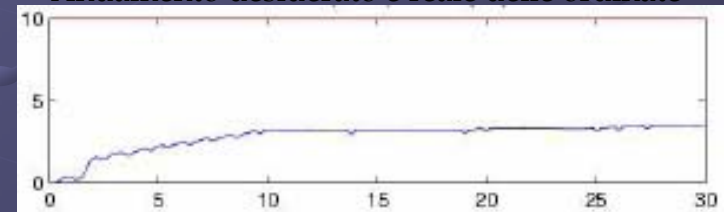
Andamento **desiderato** e **reale** della traiettoria



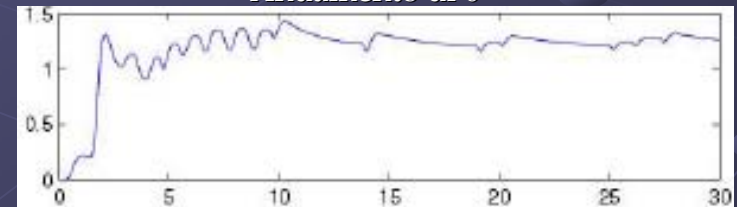
Andamento **desiderato** e **reale** delle ascisse



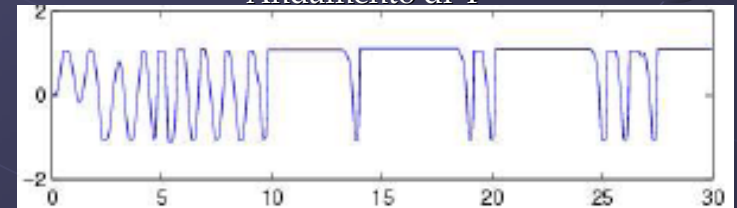
Andamento **desiderato** e **reale** delle ordinate



Andamento di θ



Andamento di Φ



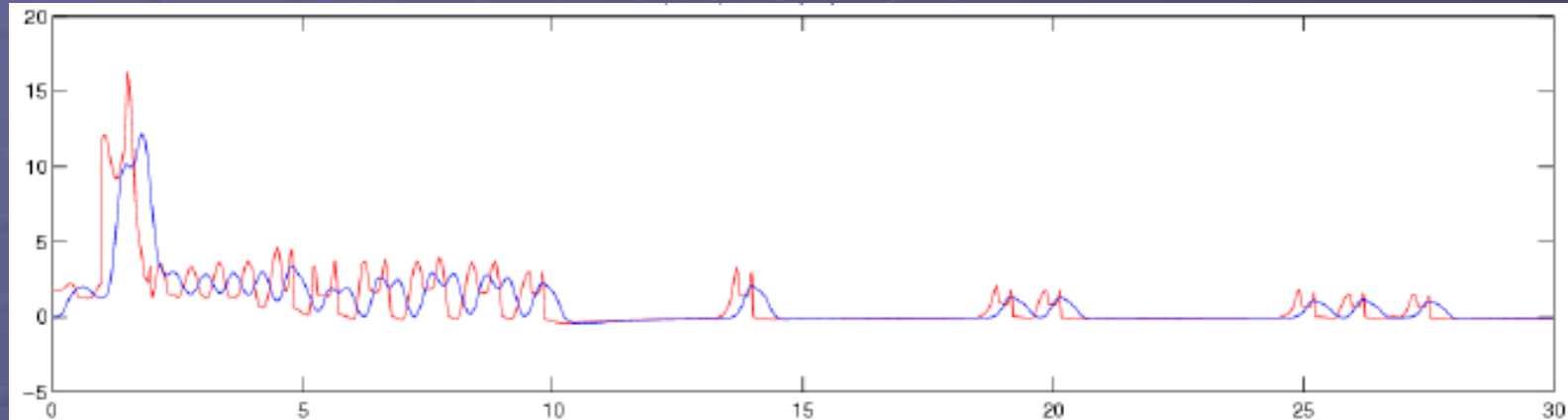
La traiettoria viene portata fino al punto (10,10)
presenza di oscillazioni - instabilità!



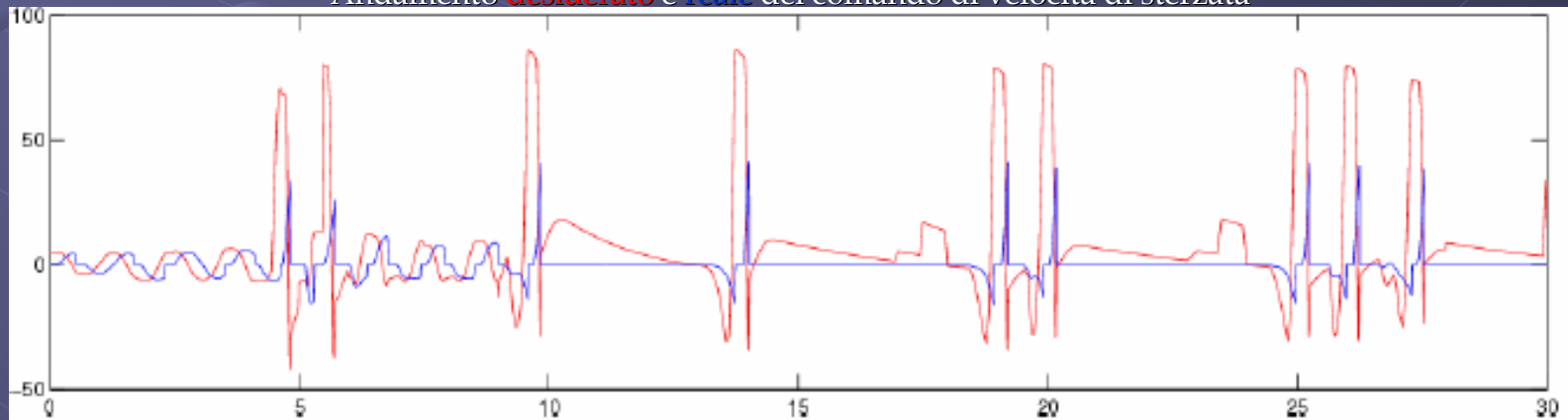
Simulazioni

Posizionamento tramite tracking adattativo con scaling temporale

Andamento **desiderato** e **reale** del comando di velocità di trazione



Andamento **desiderato** e **reale** del comando di velocità di sterzata



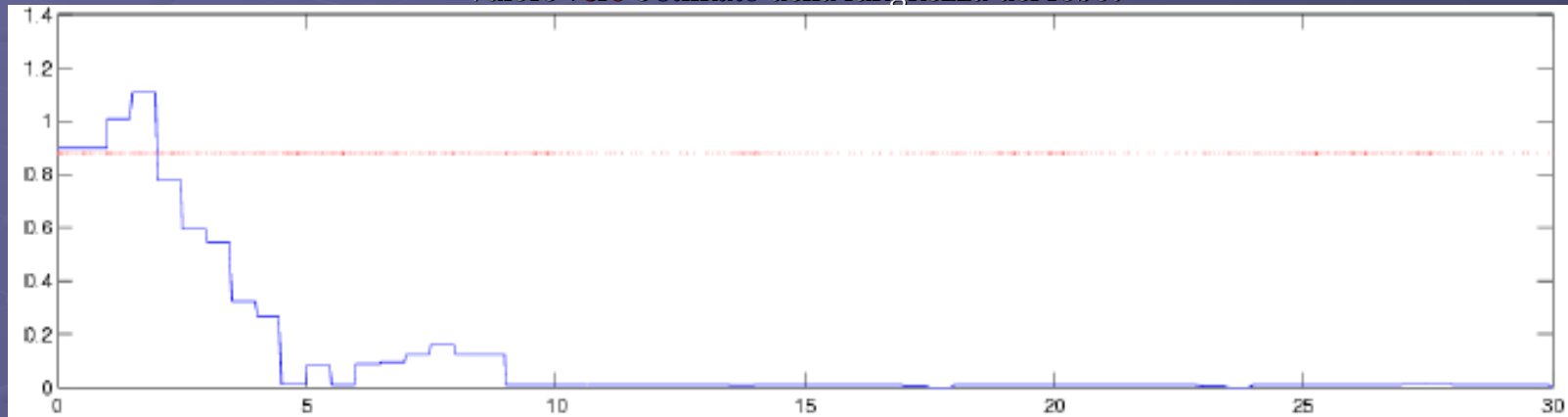
L'effetto delle non linearità e dei ritardi degli attuatori inducono la instabilità



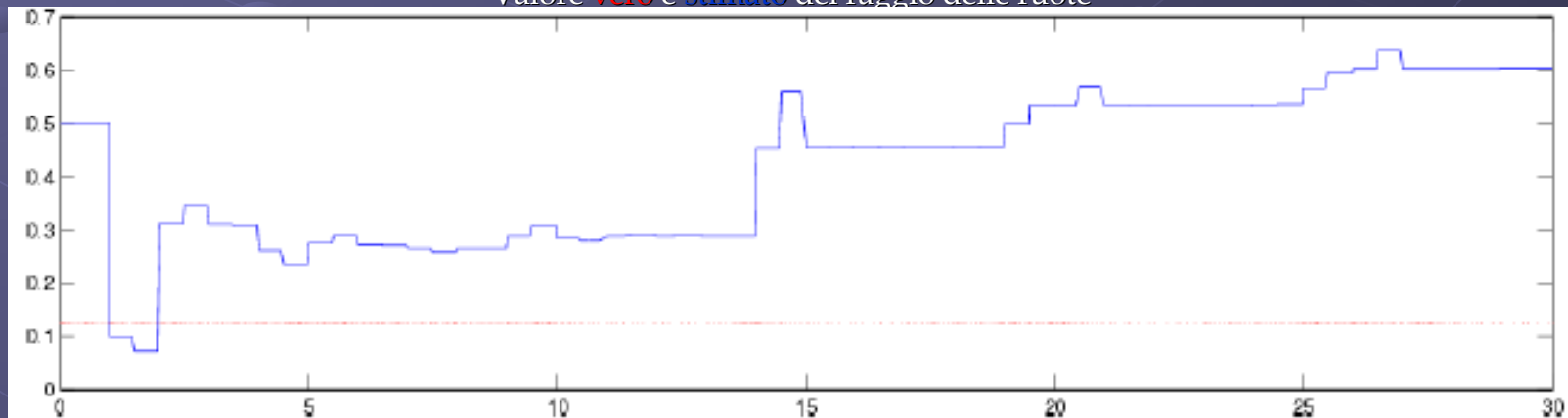
Simulazioni

Posizionamento tramite tracking adattativo con scaling temporale

Valore **vero** e **stimato** della lunghezza del robot



Valore **vero** e **stimato** del raggio delle ruote

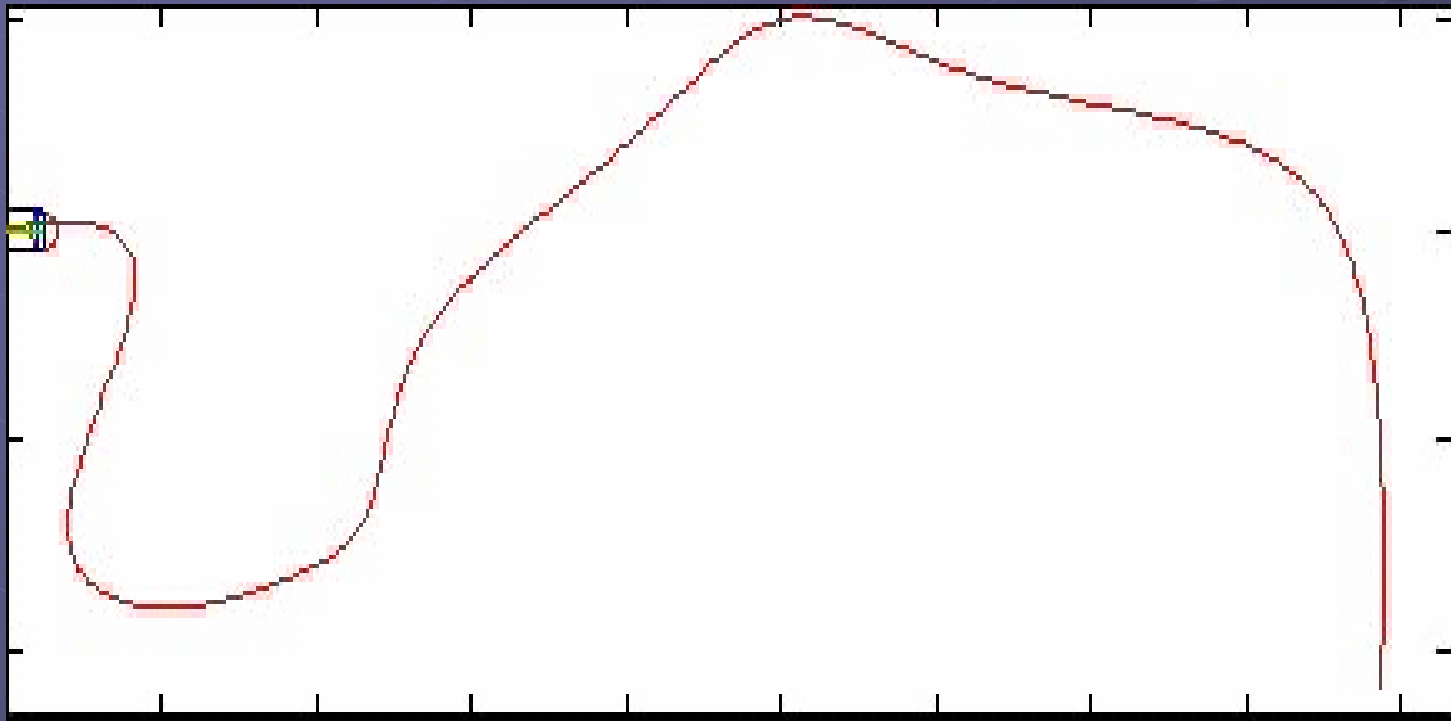


Stima di ℓ e ρ errate – si può migliorare riducendo il tempo di risposta degli attuatori



Simulazioni

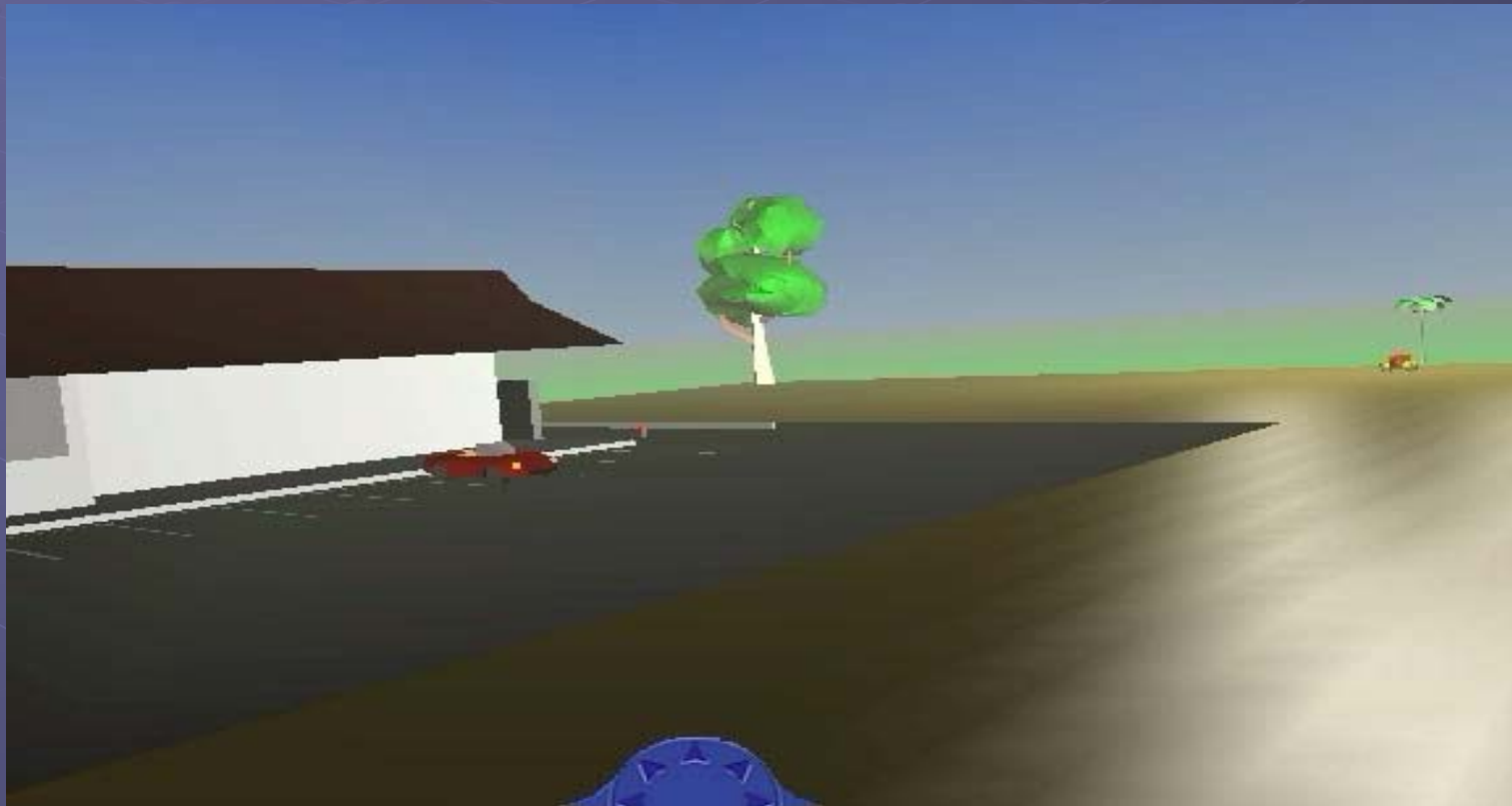
Simulazione 2D del Car-Like





Simulazioni

Simulazione 3D del Car-Like





Considerazioni finali

- Trasformazione lineare mediante feedback linearizzazione
- Identificazione e stima dei parametri da inviare al controllore
- la stima avviene mediante un'approssimazione lineare ovvero attraverso una trasformazione dei parametri al fine di rendere le equazioni dinamiche lineari rispetto ai parametri da controllare
- questo porta ad una stima diversa dal valore vero dei parametri
- l'errore, in presenza di traiettorie ammissibili, tende comunque a zero



Considerazioni finali

Vantaggi del controllo adattativo

- Misure dei parametri non necessariamente accurati
(ℓ_0 ed ρ_0 prossimi ai valori veri)

- Possibilità di riutilizzo del controllore su robot di dimensioni diverse

Caratteristiche di robustezza del controllo adattativo

- Il controllore non tiene conto dei limiti sull'angolo di sterzo
- Il controllore non tiene conto delle velocità massime degli attuatori
- Il controllore non tiene conto della dinamica degli attuatori